God
526.98
Pui/Tra
53043

00053043

NOT TO BE ISSUED
OUT OF THE LIBRARY.

THE
ASIATIC SOCIETY OF BOMBAY
Town Hall, Bombay.

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 28 September, 2015

TRAITÉ

DE TOPOGRAPHIE,

D'ARPENTAGE

ET DE NIVELLEMENT;

PAR L. PUISSANT,

Professeur de Mathématiques à l'École Impériale militaire, ancien Ingénieur-Géographe du Dépôt général de la guerre, et Membre de la Société libre des sciences et belles-lettres d'Agen.

Gx-f-13

Gx f 13

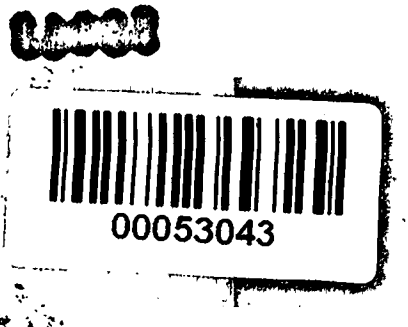
A PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1807.

God
Fre
526.98
Rui/Tra
53043

Royal Mil. Academy
Woolwich



A SON ALTESSE SÉRÉNISSIME

LE PRINCE ALEXANDRE,

VICE-CONNÉTABLE DE L'EMPIRE FRANÇAIS, &c.

MONSEIGNEUR,

En accueillant l'offre du premier volume de mon Traité de Géodésie, vous avez bien voulu accepter en même temps la dédicace de tout l'Ouvrage, dans lequel j'ai tâché de réunir en corps de doctrine les principes de calculs et les méthodes pratiques qui concernent les grandes opérations Trigonométriques et les travaux Topographiques, matières que l'on ne trouvait qu'éparses dans les écrits de quelques Géomètres modernes, ou dans divers Mémoires relatifs aux opérations des Ingénieurs-Géographes. Je n'ai entrepris ce travail qu'après une suite d'études et d'observations auxquelles je me suis livré tout entier quand j'étais

attaché au Dépôt général de la Guerre et aux armées. L'espoir d'être utile m'a fait commencer ce Traité, et l'ambition d'en faire hommage à VOTRE ALTESSE, a soutenu mon zèle jusqu'au terme. Le succès me semble garanti par votre honorable suffrage : car, quoique ce soit l'un de vos moindres mérites, peut-on ignorer combien vous êtes bon juge en ces matières, vous, MONSEIGNEUR, qui, par vos lumières, avez porté le Dépôt de la Guerre au plus haut degré de prospérité, et qui daignez accorder une bienveillance spéciale à tous les corps d'Ingénieurs! Mon hommage ne s'adresse donc pas seulement au Prince qui fut le digne Ministre du plus grand des Héros, à l'Administrateur actif et vigilant dont le génie embrasse l'ensemble et les détails des plus vastes desseins, *mais encore* au juge éclairé des sciences, au juste appréciateur des ressources qu'elles offrent à l'art de la guerre, qui, n'étant étranger à rien, recueille tout et dirige tout, pour tout faire concourir au succès des conceptions les plus sublimes et des entreprises les plus glorieuses.

Je suis,

MONSEIGNEUR,

DE VOTRE ALTESSE SÉRÉNISSIME,

Le très-respectueux serviteur,
L. PUISSANT.

AVANT-PROPOS.

Cet Ouvrage, annoncé à la fin de mon Traité de Géodésie, et auquel j'ai donné plus d'étendue que je ne me l'étais proposé d'abord, en est, à proprement parler, la seconde partie. J'y ai, en conséquence, réuni quelques théories importantes que j'avais omises; mais j'ai surtout parlé des applications de la *Géométrie* sur le terrain et *des opérations* graphiques de cabinet, en mettant à profit tout ce que l'étude et une longue expérience ont pu m'apprendre. Ainsi, après avoir donné le type complet des calculs trigonométriques qu'il s'agit d'effectuer pour obtenir les premiers élémens d'une carte, exposé dans le plus grand détail la construction de celles qu'on nomme géographiques et particulières, je passe au figuré géométrique du terrain ou au levé des plans, à l'aide de la planchette et d'*autres instrumens*; aux opérations de *l'Arpentage*, en ce qui concerne le calcul des superficies et la division des terres; à la théorie et à la pratique du Nivellement; au calcul des terrasses; enfin à la réduction des cartes et à la confection des mémoires descriptifs. D'où l'on voit que cette seconde partie comprend, entre autres choses, tout ce qui a rapport à la Topographie, tandis que la première partie est principalement consacrée au développement des théories sur lesquelles sont fondées les grandes opérations géodésiques.

La plupart des matières qui sont traitées dans ce volume, peuvent l'être d'une manière simple et élémentaire; aussi n'ai-je employé l'analyse transcendante que lorsqu'elle rendait les théories plus générales et les démonstrations plus concises et plus élégantes, ou bien quand cela devenait absolument indispensable. Mais le lecteur qui ne veut connaître que les théories simples, la pratique des calculs faciles et la Topographie, peut passer, sans inconvénient, tout ce qui est imprimé en petits caractères.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

EXEMPLES DE CALCULS GÉODÉSIQUES.

Idée du plan de ce Livre, pag. 1

CHAPITRE PREMIER. *Récapitulation des principales formules employées dans les calculs géodésiques, et dont quelques-unes sont démontrées d'une manière nouvelle,* 2

Correction relative à l'excentricité des lunettes du cercle répétiteur, 3

Lorsque les deux excentricités sont égales et de signes contraires, la correction est nulle; mais si elles sont de même signe, la correction est double de celle qui a lieu quand une seule lunette est excentrique, 4

Note. Procédé pour mesurer un angle avec le cercle répétiteur sans faire d'observations croisées, *ibid.*

La mesure des distances au zénit ne subit aucune correction, malgré l'excentricité de la lunette supérieure, 5

Moyen de ne pas avoir égard à l'épaisseur du fil du réticule dans la mesure des distances au zénit, *ibid.*

Formules pour la réduction au centre de la station; *ibid.*

Formules pour la réduction à l'horizon, 6

Manières de calculer et de réduire en Tables, l'excès sphérique, 7

Formules pour calculer les latitudes, longitudes et azimuts des sommets des triangles, 9

Lorsque l'on connaît les distances d'un point à la méridienne et à la perpendiculaire d'un lieu, on peut calculer les amplitudes de ces distances, 13 et 14

Formules plus exactes que les précédentes, pour la résolution des triangles sphéroïdiques, p. 16

Démonstration des formules relatives à la résolution d'un triangle sphéroïdique rectangle, 18

Dans son *Mémoire sur les triangles sphéroïdiques*, M. Legendre démontre que la perpendiculaire à la méridienne jouit sur le sphéroïde elliptique de révolution, de la propriété d'être coupé par l'équateur en deux parties parfaitement égales, de former une sorte de spirale comprise entre deux parallèles situés de part et d'autre de l'équateur à la même latitude, et d'être à ces limites perpendiculaires aux méridiens qui passent par ses extrémités.

Conséquences qui résultent de la théorie précédente, 21

Expressions des divers rayons de courbure relatifs à l'ellipsoïde de révolution, 23

Formules de vérification et de correction, 27

Nouvelles formules pour la résolution d'un triangle sphérique rectangle, 28

Trouver la distance des parallèles passant par les extrémités d'un arc perpendiculaire au méridien, 29

Trouver l'effet que produit sur la latitude, la longitude et l'azimut, une petite variation dans les distances d'un point à la méridienne et à sa perpendiculaire, 31

CHAP. II. *Formules pour calculer les différences de niveau*, 33

Méthode trigonométrique, *ibid.*

Méthode barométrique, 35

Table de Cavendisch pour corriger de l'effet capillaire les hauteurs observées du baromètre, 41

Il serait facile de modifier la formule barométrique de M. Laplace, de manière à ce qu'elle pût servir pour mesurer les profondeurs, en observant qu'un corps situé dans l'intérieur du globe terrestre, n'est attiré qu'en raison inverse de sa simple distance au centre.

CHAP. III. *Détermination de la figure de la Terre, par les observations du pendule*, 42

Théorie du pendule simple oscillant dans le vide, *ibid.*

Mouvement du pendule dans un milieu résistant, 47

Il résulte de cette théorie, que le temps de l'oscillation entière est le même que si ce mouvement avait lieu dans le vide, quelle que soit d'ailleurs la fonction de la résistance du milieu.

La longueur du pendule simple comparable avec le pendule composé est indépendante de la résistance de l'air. (Voyez le n° 110.)

Mouvement du pendule dans la supposition d'un fil extensible, p. 54

Précis des expériences et des réductions à faire pour déterminer la longueur du pendule à secondes, 58

Application de la théorie précédente à la recherche de l'aplatissement de la Terre, 61

CHAP. IV. *Observations géodésiques*, 67

Règles pour convertir les grades en degrés, et réciproquement, *ibid.*

Moyen de se passer de la lunette d'épreuve pour disposer l'axe optique parallèlement au plan du limbe, 68

Registre des observations géodésiques faites à l'île d'Elbe, *ibid.*

CHAP. V. *Calcul approximatif des distances*, 78

On a choisi pour exemple la triangulation de l'île d'Elbe.

CHAP. VI. *Réduction au centre et à l'horizon*, 80

Calcul de l'excès sphérique, 84

CHAP. VII. *Détermination exacte des distances*, 87

CHAP. VIII. *Calcul des distances à la méridienne et à la perpendiculaire; détermination des latitudes, longitudes et azimuts*, 88

Latitudes et longitudes de Porto-Ferraïo, de Porto-Longone et de Popolonia, 92

CHAP. IX. *Calcul des différences de niveau des points trigonométriques*, 95

Note. Formule qui donne la différence de niveau en fonction des seules distances au zénit et du rayon de la Terre, 98

LIVRE II.

ANALYSE DES PROJECTIONS DE LA SPHÈRE ET CONSTRUCTION DES CARTES GÉOGRAPHIQUES

Raison pour laquelle on a traité de cette matière, P. 99

CHAPITRE PREMIER. *Recherches des propriétés des projections stéréographiq. et orthographiq. des cercles de la sphère,* 100

Notions générales sur les projections, ou idée de la perspective, *ibid.*

Les cartes géographiques prennent différens noms, eu égard à l'étendue de la région terrestre qu'elles représentent.

De la projection stéréographique, l'œil étant à un point quelconque de l'axe des z, 102

Dans cette perspective, les projections des cercles de la sphère sont des courbes du second degré.

L'œil étant sur la surface de la sphère, 103

De là résulte la projection *dite* de Ptolémée, dans laquelle tous les cercles de la sphère sont représentés aussi par des cercles, et les angles formés par les projections de deux cercles quelconques, sont les mêmes que sur le globe.

Le point de vue étant au centre de la sphère, 108

De là résulte la projection employée en Gnomonique. Dans cette projection, les cercles de la sphère sont représentés *en général* par l'une des courbes du second degré.

De la projection orthographique, ou l'œil étant à une distance infinie du tableau, 113

Dans cette projection, les cercles de la sphère sont représentés en général par des ellipses.

CHAP. II. *Application de la théorie précédente au tracé des mappemondes,* 117

Tracé de la projection polaire, *ibid.*

Tracé de la projection sur un méridien, p. 119
Tracé de la projection horizontale, 122
Décrire sur une mappemonde la projection de la ligne la plus courte qui joint deux points donnés sur le globe, 127
Différens moyens employés pour cet effet.
Par un point donné sur la carte, comme projection stéréographique d'un point du globe, faire passer un méridien et un parallèle, 129
Différentes solutions de ce problème.
Tracé de la projection orthographique, 130

CHAP. III. *Projection par développement des cartes particulières*, 134

Du développement conique, *ibid.*
Modifications faites à cette projection par divers géomètres, 136 et 137
De la projection de Flamstéed, 137
Développement d'un demi-fuseau sphérique, 138
Comment on trace les arcs de grands rayons et les courbes en général, 121, 141 et 152
Tracer tant de droites que l'on voudra qui concourent toutes au même point que deux autres droites données, mais dont le point de concours est invisible, 141
De quelle manière le Dépôt général de la Guerre fait usage de la projection de Flamstéed pour la construction et l'assemblage des cartes chorographiques, 142
Etant données la latitude et la longitude d'un point, trouver sur la carte assujétie au développement de Flamstéed les coordonnées rectangles de ce point, en supposant la Terre un sphéroïde elliptique de révolution, 144
Dans cette projection, la surface terminée par deux méridiens et deux parallèles quelconques, est équivalente à sa correspondante sur le sphéroïde, renfermée entre les mêmes méridiens et les mêmes parallèles, 145
Expressions analytiques des tangentes, soutangentes, normales, sounormales, etc. aux méridiens dans la projection actuelle, 146
Projection de Cassini, 147
Projection de Lorgna, 148
Des cartes plates, ou du développement cylindrique, 149
Des cartes réduites, 150

LIVRE III.

OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES DE DÉTAIL ET QUESTIONS RELATIVES A L'ARPENTAGE.

Motif qui a déterminé à restreindre ce Livre, p. 152

CHAPITRE PREMIER. *Manière de remplir le canevas d'une carte, ou de lever les plans de peu d'étendue, et description des principaux instrumens employés à cet effet,* 153

Définition de la Topographie, *ibid.*

De l'usage de la chaîne métrique, 154

Formule pour calculer la projection horizontale d'une ligne inclinée à l'horizon, 155

Des levés à la planchette; *ibid.*

Description de cet instrument, 156

Il y a en général deux méthodes de lever les détails, quel que soit l'instrument que l'on adopte.

APPLICATION DE LA PREMIÈRE MÉTHODE, 159

Nécessité de vérifier ses opérations sur le terrain, 160

Manière de diminuer le nombre des stations, 161

Du déclinatoire et de son usage pour orienter les plans, *ibid.*

Manière de déterminer la déclinaison de l'aiguille aimantée, 163

APPLICATION DE LA SECONDE MÉTHODE, *ibid.*

Trois points d'un terrain étant connus sur la planchette, déterminer la position d'un quatrième point, 164

Deux points d'un terrain étant donnés sur la planchette, et la direction du méridien magnétique étant connue à l'égard de la droite qui, sur cet instrument, joint ces deux points, trouver la position d'un troisième point, 165

Des levés à la boussole 166

Description de cet instrument, *ibid.*

Lever le plan d'un polygone dont tous les points sont accessibles; moyen de diminuer le nombre des stations, *ibid.*

On peut aussi, avec la boussole, déterminer la position d'un point par le moyen de deux autres points connus, p. 168

La variation de l'aiguille aimantée est une des principales causes qui s'opposent à la justesse de cet instrument.

On figure les montagnes sur une carte, à l'aide de hachures dirigées dans le sens des lignes de plus grande pente, 169

Le relief d'un terrain et les cartes faites d'après nature sont les meilleurs modèles à mettre sous les yeux des élèves, pour leur apprendre à figurer le terrain et les préparer à faire de bons levés, 170

Des levés à l'équerre d'arpenteur; *ibid.*

Description de cet instrument et moyen de le rendre rectifiable, 171

M. Allent, chef de bataillon du génie, propose, dans son *Essai sur les reconnaissances militaires*, d'adapter deux miroirs à cet instrument, afin d'accélérer les opérations.

Usage de cet instrument, *ibid.*

On peut, à l'aide de l'équerre juste ou fausse, résoudre sur le terrain un grand nombre de problèmes utiles, 172

CHAP. II. *Solutions de divers problèmes relatifs à l'arpentage; évaluation des surfaces agraires,* 173

Idée de la manière d'opérer pour évaluer l'étendue superficielle d'une carte et des différentes parties qui la composent, *ibid.*

PROBLÈMES FONDAMENTAUX.

I. *Mesurer l'aire d'un rectangle et d'un parallélogramme,* 175

I. *Mesurer l'aire d'un triangle rectiligne, connaissant la base et la hauteur,* *ibid.*

les trois côtés, *ibid.*

deux côtés et l'angle compris, 176

un côté et les deux angles adjacens; 177

I *Trouver l'aire d'un quadrilatère dont on connaît les deux diagonales et l'angle qu'elles forment,* *ibid.*

IV *Mesurer l'aire d'un polygone régulier,* *ibid.*

V. *Trouver l'aire d'un cercle dont on connaît le rayon;* 178

VI. *Déterminer l'aire d'un secteur de cercle dont l'arc est d'un nombre de grades connu, et dont le rayon est donné,* 179

VII. *Trouver l'aire d'un segment de cercle dont l'arc d'un rayon connu comprend un nombre de grades donné,* *ibid.*

VIII. *Déterminer l'aire d'une ellipse dont on connaît les deux axes,* *ibid.*

IX. *Déterminer l'aire d'une sphère dont le rayon est connu;* p. 180

X. *Mesurer l'aire d'une zône sphérique bordée par deux parallèles dont les latitudes sont connues,* *ibid.*

XI. Formules pour déterminer l'aire d'un quadrilatère sphérique et sphéroïdique compris entre deux méridiens et deux parallèles connus, 181

DE LA MESURE DES POLYGONES IRRÉGULIERS, ou application des problèmes fondamentaux précédens; 182

Déterminer l'aire d'un polygone irrégulier, levé à l'équerre; *ibid.*

Moyen d'abréger les calculs lorsque les limites du terrain sont des lignes courbes, *ibid.*

Mesurer à l'équerre et déterminer l'aire de chacun des quadrilatères qui composent un autre quadrilatère. 183

Mesurer au graphomètre ou au cercle répétiteur un polygone rectiligne quelconque, et déterminer son aire, 184

Principes de Polygonométrie, ou recherches des relations entre les côtés, les angles et l'aire d'un polygone rectiligne, 188

Théorème concernant les polygones rectilignes, 189

Formule pour déterminer un angle ou un côté d'un polygone quelconque en fonction des autres angles et des autres côtés, 190

Formule pour déterminer l'aire d'un polygone par le moyen de ses côtés et de ses angles connus, *ibid.*

Formule pour calculer l'aire d'un polygone dont les sommets des angles ont été déterminés par intersections, 191

CHAP. III. *Suite de problèmes relatifs à l'Arpentage.*

Division des surfaces, 194

Diviser un triangle en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné, 1°. par une ligne partant du sommet; 2°. par une ligne parallèle à l'un des côtés du triangle, *ibid.*

Partager un triangle en trois parties équivalentes, par des lignes partant d'un point donné sur la base, 195

Solution graphique de ce problème, 196

Division d'un triangle par des lignes partant d'un point donné dans l'intérieur de ce triangle, 197

Solution graphique de ce problème, 198

Partager un triangle en deux parties qui soient dans un rapport donné, par une droite perpendiculaire à sa base, *ibid.*

Diviser un quadrilatère en plusieurs parties qui soient entre elles dans des rapports donnés, par des lignes parallèles à l'un des côtés, 199

Diviser un quadrilatère en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné, par une droite perpendiculaire à l'un des côtés, 201

La solution de ce problème est applicable à un polygone quelconque.

Partager un quadrilatère par une droite partant du sommet d'un des angles, de telle sorte que les deux parties soient entre elles dans un rapport donné, p. 202

Division d'un polygone irrégulier, *ibid.*

Un angle étant donné sur le terrain, mener une ligne perpendiculaire à l'un des côtés, de manière que le triangle résultant soit équivalent à une aire donnée, 203

Deux terrains étant séparés par une ligne ondulée, on propose de remplacer cette ligne par une droite, de manière que les deux terrains aient encore la même étendue superficielle, 204

Partager un triangle en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné, par une droite minimum, *ibid.*

Il faut, avant de diviser les terrains situés en pente, les mesurer suivant la *méthode de cultellation*, 207

LIVRE IV.

THÉORIE ET PRATIQUE DU NIVELLEMENT.

Objet de ce Livre, 208

CHAPITRE PREMIER. *Principes du Nivellement; équation d'équilibre d'une masse fluide*, 209

Il résulte de cette théorie, 1° que les couches de niveau d'un fluide homogène sont celles dont toutes les molécules sont également pressées, 212

2°. Que la surface d'un fluide pesant et de peu d'étendue est horizontale, 213

Valeur de la pression en un point quelconque d'un fluide, *ibid.*

Des points de niveau, du niveau apparent et du niveau vrai, *ibid.*

Principe servant de base aux opérations du Nivellement, *ibid.*

Définitions de la ligne de niveau apparent, et de celle du niveau vrai, etc., 214

Formule pour calculer la différence du niveau apparent au niveau vrai, *ibid.*

Manière de réduire cette formule en fraction continue, 215

De l'effet de la réfraction terrestre sur la différence de niveau, *ibid.*

Manière de déterminer la différence de niveau de deux points, sans avoir égard à la réfraction ni à la différence du niveau apparent au niveau réel, 217

CHAP. II. *Description et Théorie de quelques instrumens en usage dans le Nivellement topographique.*

Du niveau d'eau; sa construction, p. 218
Manière de s'en servir, 219 et 220
Ce qui arriverait si les deux fioles du niveau n'avaient pas le même diamètre intérieur, *ibid.*

Description de la mire, 221

Manière d'en faire usage, 223

Du niveau à bulle d'air et à lunette, de Chézy, *ibid.*

Description des différentes pièces qui le composent, 224 et suiv.
Sa vérification et sa rectification, 227
Les différens axes optiques horizontaux obtenus avec cet instrument, en le faisant tourner sur son pivot, ne sont pas toujours dans le même plan horizontal, 229

Description des niveaux de pente, ou clitomètres; du niveau à perpendicule, 231

Différentes manières de le graduer, 232
Manière de s'en servir, 232 et 233
Du niveau de pente, de Chézy; sa description, *ibid.*
Sa vérification et sa rectification, 237

CHAP. III. *Pratique du Nivellement topographique,* 238

Ce que l'on entend par nivellement simple et par nivellement composé, *ibid.*

Du nivellement simple, 239

Déterminer la différence de niveau de deux points, au moyen du niveau d'eau ou du niveau à bulle d'air, *ibid.*
Lever le profil d'un terrain, 241
Déterminer la différence de niveau de deux points, à l'aide du niveau à perpendicule, *ibid.*
Déterminer, au moyen du clitomètre de Chézy, la pente d'une droite, 244
D'un point donné sur un plan incliné, mener une droite dans ce plan, laquelle fasse avec l'horizon un angle donné, 245
Diverses solutions de ce problème.

Du nivellement composé, 248

Évaluation numérique de la différence de niveau de deux points, 250

La minute d'un nivellement composé étant faite, rapporter ce nivellement à une seule ligne ou à une seule surface de niveau, p. 251
Comment on lie à un nivellement en long des nivellemens en travers, 252

CHAP. IV. *Du calcul des terrasses; détermination des dimensions des solides dont se composent les déblais et les remblais*, 255

Dénominations des parties constituantes d'une route, 256
Connaissant la pente absolue d'une ligne, déterminer sa pente par mètre, *ibid.*
Connaissant une cote rouge ou hauteur verticale entre une ligne de projet et une ligne de terrain, ainsi que la pente par mètre de l'une et de l'autre lignes, déterminer, dans tous les cas, ce que serait cette hauteur à une distance donnée de la première, 257
Règles pour trouver les points de passage, 259

Observations sur les talus et les raccordemens des alignemens droits, 261

Formules pour trouver les points de passage, *ibid.*
La méthode graphique employée par les ingénieurs des ponts et chaussées pour raccorder les alignemens droits, donne lieu à une courbe parabolique, 262

Cubature des solides, 264

Génération des surfaces gauches, 265
Mesure du prisme triangulaire, *ibid.*
Mesure du solide à base trapézoïdale, 266
Mesure du corps à base parallélogrammique, 267
Épure d'une route, 268

Tableau d'inscription de divers solides, ou Calcul des terrasses d'une partie de route, 269

LIVRE V.

RÉDUCTION DES CARTES ET DES DESSINS, ET IDÉE DE LA CONFECTION DES MÉMOIRES DESCRIPTIFS.

Motifs pour lesquels on a traité de ces matières, 271

CHAPITRE PREMIER. *Précis de quelques-unes des méthodes graphiques employées pour copier ou réduire les plans*, 272

Les dessins se calquent à la vitre et se réduisent aux carreaux ; p. 272 et 273
Usage de l'angle réducteur, *ibid.*

CHAP. II. *Théorie et usage des instrumens propres à copier ou à réduire les dessins et les plans.* 273

Description et usage du Pantographe, *ibid.*
Description et usage du Micrographe, 279

CHAP. III. *Questions relatives à la rédaction des cahiers topographiques et statistiques,* 285

SUPPLÉMENT AU PREMIER LIVRE.

Note sur le n° 11, 296
Note sur le centre d'oscillation, 297

La position du centre d'oscillation est indépendante de la résistance du milieu, *ibid.*

Formules géodésiques analogues à celles du n° 7, 299

Démonstration des formules de Dionis-du-Séjour pour calculer les latitudes, longitudes, etc., *ibid.*
Application de ces formules, 320

SUPPLÉMENT AU TROISIÈME LIVRE.

Recherche de l'aire d'une zône sphéroïdique, 323

TABLE alphabétique des matières contenues dans le Traité de Géodésie et dans celui-ci, et des noms des principaux Auteurs qui ont écrit sur le même sujet, 325

ERRATA, 332

TABLES GÉODÉSIQUES, 333

Fin de la Table.

TRAITÉ
DE TOPOGRAPHIE,
D'ARPENTAGE
ET DE NIVELLEMENT.

LIVRE PREMIER.

EXEMPLES DE CALCULS GÉODÉSIQUES.

J'OMETTRAI, dans ce livre, les démonstrations de la plupart des formules que j'ai déjà publiées ; mais j'en donnerai de nouvelles applications pour présenter par ordre tous les calculs d'une chaîne de triangles dont quelques-uns des côtés peuvent servir de bases aux opérations topographiques. Je simplifierai même diverses méthodes théoriques et pratiques connues. Et afin de n'employer

aucun nombre fictif, je choisirai plusieurs des observations géodésiques que M. Moynet et moi avons faites, en notre qualité d'Ingénieurs du Dépôt général de la Guerre, pour déterminer la position géographique et l'étendue de l'île d'Elbe. Celles-ci, quoiqu'en petit nombre, étant réunies aux observations astronomiques rapportées dans le Traité de Géodésie, formeront un système complet de triangulation, très-propre, ce me semble, à servir de modèle aux jeunes Ingénieurs qui pourraient être chargés de travaux de ce genre.

Comme les observations du pendule mettent en évidence plusieurs phénomènes naturels, et qu'elles entrent dans le domaine de la haute Géodésie, je donnerai en outre, pour ne laisser rien à desirer sur ce sujet, une théorie très-développée de cet instrument, et j'en ferai une application à la Recherche de la Figure de la Terre. Ensuite je n'aurai plus à m'occuper que d'objets purement relatifs à cet Ouvrage.

CHAPITRE PREMIER.

Récapitulation des principales formules employées dans les calculs géodésiques, et dont quelques-unes sont démontrées d'une manière nouvelle.

Correction relative à l'excentricité des lunettes du cercle répétiteur.

1. Les lunettes du premier cercle construit d'après les dessins du célèbre Borda, étaient toutes deux excentriques, mais de différens côtés, comme on peut le voir par les planches 3 et suivantes du Traité de Géodésie. Il est remarquable que quand les excentricités sont égales et de signes contraires, leur effet sur l'angle mesuré est nul. Pour le prouver, soit en général $CE = e$, Fig
l'excentricité de la lunette supérieure, $CD = e'$, l'excentricité de la lunette inférieure, D la distance de l'objet à droite, G celle de l'objet à gauche, et supposons que les degrés du limbe se lisent de gauche à droite.

Lors de la première observation d'un angle entre deux objets, la lunette supérieure fixée sur zéro a la position AE, et la lunette inférieure est dirigée suivant BD. Pour faire la deuxième observation conjuguée, on amène cette lunette inférieure sur l'objet à droite, en faisant tourner tout l'instrument sur son pivot, et l'on dirige la lunette supérieure rendue libre, sur l'objet à gauche, de sorte qu'elle prend la position BE'; or il est visible que cette lunette,

à la fin de la seconde observation, a décrit une quantité angulaire égale à la somme des angles ECE', DCD'. (*)

Cela posé, si l'on désigne par x l'angle cherché BCA, et par m l'arc parcouru sur le limbe, la mesure de l'angle DCF sera

$$y = ACE + BCD + x;$$

elle sera encore

$$y = BCE' + ACD' - x + m;$$

mais vu la petitesse des angles α, α', β, β',

$$ACE = 100^{gr} - \alpha, \quad BCD = 100^{gr} - \beta, \quad BCE' = 100^{gr} - \frac{e}{G}$$

$$= 100 - \frac{e}{D}, \qquad = 100 - \frac{e'}{G}, \quad ACD' = 100 - \frac{e'}{D}.$$

Ainsi, après avoir égalé les deux valeurs de y, simplifié et réduit en secondes, on aura pour la correction cherchée

$$x - \frac{m}{2} = \frac{e - e'}{2D.\sin.1''} - \frac{e - e'}{2G.\sin.1''}.$$

Cette formule, qui est très-générale, nous apprend 1°. que si les deux excentricités sont égales et disposées comme dans la figure, la correction est nulle; 2°. que si les deux excentricités sont

(*) Voici un autre procédé pour mesurer un angle avec le cercle répétiteur. Au lieu de faire des observations croisées, comme ci-dessus, on fixe d'abord la lunette supérieure à zéro, et on la dirige de même sur l'objet à droite, puis on y amène la lunette inférieure, qui ne sert plus alors que de repère, et sans faire tourner le limbe, on pointe la lunette supérieure, rendue mobile, sur l'objet à gauche; de cette manière, l'angle est mesuré exactement par l'arc que cette lunette a parcouru, lorsqu'elle n'a point d'excentricité. Si l'on veut continuer d'observer le même angle, afin d'atténuer les erreurs du pointé et celles des divisions du limbe, on fera tourner l'instrument sur son pivot, pour ramener la lunette supérieure sur l'objet à droite; on y ramènera de même la lunette inférieure, pour la faire servir de repère, et ensuite on dirigera, cette fois, la lunette supérieure, rendue libre, sur l'objet à gauche, et la *ligne de foi* de cette lunette marquera le double de l'angle observé. On peut continuer d'opérer de la même manière pour avoir le triple, le quadruple, etc. de cet angle; mais ce procédé exige plus de temps que par les observations croisées, lorsque l'on veut atteindre le même degré de précision.

égales et du même côté, cette correction est le double de celle qui a lieu quand la lunette supérieure n'est point excentrique.

On a rarement besoin de faire usage de la formule précédente. M. Delambre qui ne l'a donnée que pour le cas où $e = 0$, l'a réduite en table, en supposant successivement $e' = -16$, $= -18$, $= -20$ lignes. (Voyez à ce sujet la page 102 de la *Base du Système métrique décimal.*)

Quant à la mesure des distances au zénit, elle ne subit aucune correction malgré l'excentricité de la lunette supérieure; c'est un fait dont il est aisé de s'assurer, et qui tient à ce que la correction, lors de la deuxième observation conjuguée, est égale et de signe contraire à celle qui se manifeste pendant la première observation. Mais lorsque l'on vise à une grande précision, il importe de ne pas cacher le point de mire avec le fil horizontal du réticule, parce que autrement on n'est presque jamais sûr que ce point est précisément dans l'axe optique, c'est-à-dire au milieu même du fil. Pour éviter toute erreur à cet égard, on met successivement les deux bords du fil en contact avec le point de mire. De cette manière, on est dispensé de connaître l'épaisseur du fil, à laquelle au reste il est inutile d'avoir égard dans les observations réciproques (art. 108. Géod.); mais dans ce cas, il faut toujours mettre le même bord du fil à la hauteur du sommet du signal.

Formules pour la réduction au centre de la station.

2. S'il y a impossibilité d'observer au centre de la station, on *y réduit l'angle de position mesuré*, en ajoutant à celui-ci la valeur de

$$C - O = \frac{r \sin (O + y)}{D . \sin 1''} - \frac{r \sin y}{G . \sin 1''},$$

r étant la distance au centre, C l'angle réduit au centre de la station, O l'angle de position, y celui de direction, D la distance de l'objet à droite, et G celle de l'objet à gauche. La détermination de r et de y présente souvent des difficultés; mais nous avons prévu les principales (art. 60 et 61. Géod.). Nous observerons seulement dans cette circonstance, que si la lunette supérieure

était excentrique, il serait nécessaire de faire une correction à l'angle de direction observé; mais c'est précisément pour rendre cette correction nulle que l'on ne donne plus d'excentricité à la lunette supérieure.

La réduction au centre s'obtient aussi à l'aide d'un seul terme; en effet la formule précédente pouvant s'écrire ainsi,

$$C - O = \frac{rG.\sin(O+y) - r.D\sin y}{D,G},$$

et le triangle ABC donnant

$$G = \frac{D.\sin A}{\sin(A+C)},$$

on a, à cause de $O = C$, du moins à peu de chose près,

$$G = \frac{D.\sin A}{\sin(A+O)};$$

et par suite

$$C - O \text{ ou } \varepsilon = \frac{r\sin A.\sin(O+y) - r\sin y.\sin(A+O)}{D.\sin A};$$

puis développant et réduisant en secondes

$$\varepsilon = \frac{r\sin O.\sin(A-y)}{D.\sin A.\sin 1''}.$$

Quoique cette formule soit moins rigoureuse que celle dont elle dérive, elle est cependant d'une exactitude suffisante. Il faut bien remarquer que le sommet de l'angle A est l'objet à droite.

S'il était nécessaire d'avoir égard aux réductions dues à la phase des signaux, on emploierait l'une des formules des art. 62 et 63. Géod.

Formules pour la réduction à l'horizon.

3. Les angles réduits au centre de la station se réduisent ensuite à l'horizon. Toutes les fois que les distances au zénit diffèrent de l'angle droit de plus de 2 ou 3 grades, il est commode et exact

d'employer à cet effet la formule suivante

$$\sin \tfrac{1}{2} z = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{C+\delta+\delta'}{2}-\delta\right).\sin\left(\frac{C+\delta+\delta'}{2}-\delta'\right)}{\sin\delta.\sin\delta'}},$$

z dénotant l'angle réduit à l'horizon, C l'angle au centre, δ et δ' les distances au zénit des deux objets observés.

Si les hauteurs ou les dépressions sont plus petites que deux ou trois grades, on a recours aux tables que j'ai données, ou bien l'on se sert de la formule

$$x = \left\{\left(1^q - \frac{\delta+\delta'}{2}\right)^2 . \operatorname{tang}\tfrac{1}{2} C - \left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)^2 . \cot\tfrac{1}{2} C\right\} . \sin 1'',$$

dans laquelle 1^q désigne un quadrant, c'est-à-dire 100^{gr} ou 90 degrés.

Excès sphérique.

4. La connaissance de l'excès sphérique est nécessaire pour calculer par la méthode de M. Legendre, les parties de la méridienne et de sa perpendiculaire, (art. 72. Géod.); elle est utile aussi pour juger du degré d'exactitude des observations; enfin elle donne le moyen de conclure le troisième angle d'un triangle, quand les circonstances n'ont point été favorables à la mesure de cet angle, comme lorsqu'il s'agit, par exemple, de fixer la position des points secondaires inaccessibles, ou de quelques sommets escarpés.

Cet excès étant $\varepsilon = \frac{R''f}{r^2}$, et l'aire du triangle ayant pour valeur $f = \frac{1}{2} bc.\sin A$, on a Fig. 2

$$\varepsilon = \left(\frac{R''}{2r^2}\right) bc.\sin A \quad \text{(art. 30. Géod.)}$$

Cela posé, si on abaisse la perpendiculaire BD, on aura $b = \alpha + \gamma$, et alors

$$\varepsilon = \frac{R''}{2r^2} c(\alpha+\gamma)\sin A = \frac{R''}{2r^2} \alpha c \sin A + \frac{R''}{2r^2} c\gamma \sin A.$$

Mais les deux triangles rectangles qui sont à peu-près rectilignes,

donnent

$$\alpha = a \cos C, \quad \gamma = c \cos A;$$

donc

$$\varepsilon = \left(\frac{R''}{2r^2}\right) ac \sin A \cos C + \left(\frac{R''}{2r^2}\right) c^2 \sin A \cos A.$$

De même le triangle ABC qui est lui-même très-peu courbe, donne

$$c \sin A = a \sin C;$$

donc enfin

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\left(\frac{R''}{2r^2}\right) a^2 \sin 2C + \tfrac{1}{2}\left(\frac{R''}{2r^2}\right) c^2 \sin 2A.$$

Telle est la forme qu'il convient de donner à la valeur de ε pour calculer une table qui donne l'excès sphérique en deux parties. On entrera dans cette table avec chacun des deux côtés en mètres et l'angle adjacent. M. Delambre l'a donnée en toises (*Base du Système métrique décimal*); il a même formé une table, à l'aide de laquelle on a tout d'un coup l'excès sphérique. J'en ai calculé une pareille en nouvelles mesures; on la trouvera à la fin de cet Ouvrage. Pour s'en servir on cherche sur la carte des triangles, et au moyen de l'échelle, les nombres de mètres contenus dans leur base et dans leur hauteur, et avec ces deux nombres pris pour argumens, on entre dans la table, comme dans toutes celles qui sont à double entrée. Quoique cette table s'arrête aux nombres 10000 et 50000, on voit bien qu'elle peut servir pour des nombres multiples.

Désignant par b la base, et par h la hauteur d'un triangle, on a évidemment

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\left(\frac{R''}{r^2}\right) bh.$$

Veut-on faire usage des anciennes mesures? Dans ce cas

$$\log \frac{R''}{2r^2} = 1,98527, \text{ ou bien } \varepsilon = 0'',00000\ 00096\ 66 \,.\, bh.$$

Veut-on au contraire faire usage des nouvelles mesures? On a

$$\log \frac{R''}{2r^2} = 1,89509, \text{ ou bien } \varepsilon = 0'',00000\ 00078\ 54 \,.\, bh.$$

Dans l'application de ces formules, il est suffisant d'exprimer les longueurs en unités de mille toises ou de mille mètres; ainsi l'on a en secondes exagésimales.

$$\varepsilon = 0'',009666 \,.\, bh,$$

et en secondes centésimales

$$\varepsilon = 0'',007854 \,.\, bh.$$

C'est d'après cette valeur que j'ai calculé la table en question.

Formules pour calculer les latitudes, longitudes et azimuts des sommets des triangles.

5. J'ai donné, dans le chapitre XII du Traité de Géodésie, des démonstrations très-élémentaires de ces formules; mais ceux qui connaissent le calcul différentiel préféreront sans doute la méthode suivante, à cause de son élégance et de sa généralité, et parce qu'elle conduit beaucoup plus rapidement aux mêmes résultats.

Soit PA le premier méridien, P la longitude et L la latitude du point M; Fig. 1.
P' la longitude et L' la latitude du point M', sur une sphère dont le rayon est pris pour unité. Enfin, soit S l'arc MM' ou la plus courte distance du point M au point M'; on aura, en vertu de la formule de Néper, démontrée à l'art. 29, Géod.,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}[200^{gr} - (L+L')] = \frac{\cos\frac{1}{2}(V+V'-200)}{\cos\frac{1}{2}(V-V'+200)} \cdot \operatorname{tang}\frac{S}{2},$$

ou simplement

$$\cot\tfrac{1}{2}(L+L') = \frac{\sin\left(\frac{V'+V}{2}\right)}{\sin\left(\frac{V'-V}{2}\right)} \cdot \operatorname{tang}\frac{S}{2}.$$

Différentiant cette équation par rapport à S, V' et L', et cherchant ce que devient le coefficient différentiel $\frac{dV'}{dS}$ à l'origine de S, où $L'=L$ et $V'=V$, on trouvera

$$\left(\frac{dV'}{dS}\right) = \sin V \,.\, \operatorname{tang} L.$$

De plus, le triangle sphérique MPM' donne $\sin V \,.\, \sin S = \cos L' \,.\, \sin(P'-P)$. Si l'on différentie et que l'on cherche ce que devient le rapport $\frac{dP'}{dS}$ lorsque

$S=0$, on obtiendra

$$\left(\frac{dP'}{dS}\right)=\frac{\sin V}{\cos L},$$

dP' représentant la différentielle de l'angle P'. Enfin le triangle PMM' donnant la relation $\sin L=\cos S\sin L'-\sin S\cos L'\cos V'$, (art. 18, Géod.), on a à l'origine de S

$$\left(\frac{dL'}{dS}\right)=\cos V.$$

Cela posé, puisqu'il est évident que

$$L'=f(S),\qquad V'=f(S),\qquad P'=f(S),$$

f étant le signe d'une fonction indéterminée de l'arc de grand cercle S, ou d'une ligne géodésique; le théorème de Taylor donnera, en prenant le point M pour origine de l'arc S,

$$\left.\begin{aligned}
L'&=L+\left(\frac{dL'}{dS}\right).S+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2L'}{dS^2}\right).S^2+\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3L'}{dS^3}\right).S^3+\dots\\
P'&=P+\left(\frac{dP'}{dS}\right).S+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2P'}{dS^2}\right).S^2+\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3P'}{dS^3}\right).S^3+\dots\\
V'&=V+\left(\frac{dV'}{dS}\right).S+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2V'}{dS^2}\right).S^2+\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3V'}{dS^3}\right).S^3+\dots
\end{aligned}\right\};\quad (A)$$

mais, par ce qui précède, les valeurs des coefficiens différentiels qui doivent se rapporter au point où $S=0$, sont

$$\left(\frac{dL'}{dS}\right)=\cos V;\qquad \left(\frac{dP'}{dS}\right)=\frac{\sin V}{\cos L};\qquad \left(\frac{dV'}{dS}\right)=\sin V.\tang L;$$

$$\left(\frac{d^2L'}{dS^2}\right)=-\sin^2V.\tang L;\quad \left(\frac{d^2P'}{dS^2}\right)=\frac{\sin 2V.\tang L}{\cos L};\quad \left(\frac{d^2V'}{dS^2}\right)=\tfrac{1}{2}\sin 2V(2\tang^2L+1).$$

Si l'on compte les azimuts et les longitudes du sud à l'ouest, il faudra, suivant la notation de la figure, changer V en $200-Z$ et V' en $400-Z'$, et pour lors les séries (A) deviendront,

$$\left.\begin{aligned}
L'&=L-\cos Z.S-\tfrac{1}{2}\sin^2Z\tang L.S^2\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
P'&=P+\frac{\sin Z}{\cos L}.S-\tfrac{1}{2}\sin 2Z\frac{\tang L}{\cos L}.S^2\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
Z'&=200^{gr}+Z-\sin Z.\tang L.S+\tfrac{1}{4}\sin 2Z(2\tang^2L+1).S^2.\\
&=200\ +Z-\sin Z.\tang L'.S-\tfrac{1}{4}\sin 2Z.S^2\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\}\quad (B).$$

Pour faire à la première de ces formules la correction due à l'ellipticité de la terre, nous développerons d'abord en série ordonnée suivant les puissances de $\Delta L=L-L'$, la valeur de CN (fig. 28, Géod.). Or, soit, pour abréger, $CM=K$,

$CN = K'$, on aura, par le théorème de Taylor,

$$K' = K + \left(\frac{dK}{dL}\right)\Delta L + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2K}{dL^2}\right)\Delta L^2 + \ldots\ldots$$

et parce que $K = e^2 r \sin L$ (page 150, Géod.), les différentiations successives donneront, en ne conservant toute fois que les termes de l'ordre e^2,

$$\left(\frac{dK}{dL}\right) = e^2 r \cos L, \qquad \left(\frac{d^2K}{dL^2}\right) = -e^2 r \sin L.$$

Il suit de là, et à cause que K' diminue quand ΔL augmente, que

$$K - K' = \Delta K = e^2 r \cos L.\Delta L + \tfrac{1}{2} e^2 r \sin L.\Delta L^2.$$

D'un autre côté, l'angle NBM ou $\downarrow = \frac{(K-K')\cos L'}{r} = \frac{\Delta K.\cos L'}{r}$ (pag. 151, Géod.), est la correction de latitude; ainsi substituant dans cette expression, pour ΔK sa valeur, et faisant attention que $\cos L' = \cos L + \sin L \sin \Delta L$, il viendra

$$\downarrow = e^2 \cos^2 L.\Delta L + \tfrac{3}{2} e^2 \sin L \cos L.\Delta L.\sin \Delta L.$$

Enfin, puisque la latitude exacte de $B = L - \Delta L - \downarrow$ (page 160, Géod.); on aura

$$L' = L - (S.\cos Z + \tfrac{1}{2} S^2.\sin^2.Z \operatorname{tang} L)(1 + e^2\cos^2.L + \tfrac{3}{2} e^2 \sin L \cos L \sin \Delta L).$$

Telles sont les formules dont M. Delambre s'est servi à l'occasion de la nouvelle mesure d'un arc du méridien, et pour l'application desquelles nous avons donné des tables très-étendues. On déduit aisément des mêmes séries (A) les formules de M. Legendre, en y supposant $V = 100^{gr}$, et comptant les azimuts du nord. La première hypothèse donne d'abord

$$\frac{dL'}{dS} = 0, \qquad \frac{dP'}{dS} = \frac{1}{\cos L}, \qquad \frac{dV'}{dS} = \operatorname{tang} L,$$

$$\frac{d^2L'}{dS^2} = -\operatorname{tang} L, \qquad \frac{d^2P'}{dS^2} = 0, \qquad \frac{d^2V'}{dS^2} = 0,$$

$$\frac{d^3L'}{dS^3} = 0, \qquad \frac{d^3P'}{dS^3} = \frac{2\operatorname{tang}^2.L}{\cos L}, \qquad \frac{d^3V'}{dS^3} = -\operatorname{tang} L(2\operatorname{tang}^2.L + 1),$$

et les séries dont il s'agit donnent ensuite, en y mettant $200^{gr} - z'$ pour V', afin de se conformer à la notation du n° 80, Géod.

$$\left.\begin{aligned} L' &= L - \tfrac{1}{2} S^2.\operatorname{tang} L \ldots\ldots \\ P' &= P + \frac{S}{\cos L} - \tfrac{1}{3} S^3.\frac{\operatorname{tang}^2.L}{\cos L} \ldots\ldots \\ z' &= 100^{gr} - S.\operatorname{tang} L + \tfrac{1}{3} S^3.\operatorname{tang} L(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2.L) \ldots\ldots \\ &= 100 - S.\operatorname{tang} L' - \tfrac{1}{3} S^3.\operatorname{tang} L'(1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2.L') \ldots\ldots \end{aligned}\right\}, (C).$$

Il faut maintenant adapter à la première de ces formules le terme dépendant de l'aplatissement de la terre (page 150, Géod.). Pour cet effet, faisant comme ci-dessus $CM = K$, $CN = K'$, et de plus $AB = S$ (fig. 28, Géod.) : on aura, à cause de $K' = f(S)$, et prenant le point A pour origine de la ligne géodésique S,

$$K' = K + \left(\frac{dK'}{dS}\right).S + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2K'}{dS^2}\right).S^2 + \ldots$$

mais $K' = e^2 r \sin L'$, par conséquent, en rapportant les valeurs des coefficiens différentiels au point où $S = 0$, on a

$$\frac{dK'}{dS} = e^2 r \cos L \frac{dL'}{dS} = e^2 r \cos L \cos V$$

$$\frac{d^2K'}{dS^2} = -e^2 r \sin L \cos V \frac{dL'}{dS} - e^2 r \cos L \sin V \frac{dV'}{dS}$$

$$= -e^2 r \sin L \cos^2 . V - e^2 r \cos L \sin^2 . V \operatorname{tang} L;$$

et puisque dans le cas actuel $V = 100^{gr}$, on a simplement

$$\frac{dK'}{dS} = 0, \qquad \frac{d^2K'}{dS^2} = -e^2 r \sin L,$$

partant MN, ou

$$K - K' = \tfrac{1}{2} e^2 r \sin L . S^2;$$

enfin, à cause de $\downarrow = \dfrac{(K - K')\cos L}{r}$, du moins sensiblement, on a

$$L' = L - \tfrac{1}{2} S^2 . \operatorname{tang} L - \tfrac{1}{2} e^2 \sin L \cos L . S^2$$

$$= L - \tfrac{1}{2} S^2 . \operatorname{tang} L (1 + e^2 \cos^2 . L).$$

Dans toutes les formules ci-dessus, les termes en fonction de la ligne géodésique S, ou d'un côté de triangle, doivent être convertis en secondes, et à cet effet être multipliés par R'' ou divisés par $\sin 1''$. De plus, comme S est censé un arc dont le rayon $= 1$, il faut au lieu de S écrire $\frac{B}{r}$ ou $\frac{y}{r}$, B ou y étant la longueur de cet arc exprimé en mètres, et r son rayon de courbure exprimé en même mesure. Il importe donc de connaître la valeur de r pour une ligne géodésique quelconque. Nous nous occuperons bientôt de cette recherche.

6. Comme les formules (*C*), n° précédent, dépendent de la latitude L du pié de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque sur le méridien principal de la carte, proposons-nous de déterminer cette latitude, connaissant la distance x de ce pié

au lieu principal dont la latitude connue est l. Or il est clair, d'après ce qui précède, que l'on a en général

$$L = l + \left(\frac{dl}{dx}\right)x + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2l}{dx^2}\right)x^2 + \ldots$$

et l'on sait, page 131, Géod., que

$$\frac{dl}{dx} = \frac{(1-e^2\sin^2.l)^{\frac{3}{2}}}{a(1-e^2)} = \frac{1}{r},$$

r étant le rayon de courbure de l'arc du méridien à la latitude l; ainsi l'on a

$$\frac{d^2l}{dx^2} = -\frac{3e^2}{1-e^2}\sin.l\cos.l.\frac{(1-e^2\sin^2.l)^{\frac{1}{2}}}{a}.\frac{dl}{dx} = -\frac{3e^2}{1-e^2}.\frac{\sin.l.\cos.l}{r'};$$

dans cette expression $r' = \frac{a}{(1-e^2\sin^2.l)^{\frac{1}{2}}}$ est la normale du point l: on a donc, en substituant ces valeurs dans celle de L ci-dessus, et réduisant en secondes,

$$L - l = R''\frac{x}{r} - \tfrac{3}{4}R''\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right).\sin.2l.\frac{x^2}{rr'}; \quad (1)$$

x doit être pris positivement ou négativement, selon que cet arc se trouve au nord ou au sud du lieu principal. On peut presque toujours, dans la pratique, se contenter du terme $R''\frac{x}{r}$; d'ailleurs il est aisé de calculer le second terme en faisant usage des valeurs numériques données pages 135 et 136, Géod., ainsi que de celles de r et r' rapportées plus bas; et il y a cela de remarquable, *que les coefficiens de x et x^2 sont constans pour toute l'étendue de la carte* (*).

(*) J'ai observé, page 154, Géod., que pour réduire en parties de grade un arc x du méridien, l'on pouvait faire usage de la formule $L - l$ ou $\varphi = \frac{R''x}{\rho}(1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2.L)$; mais elle ne convient réellement que pour les arcs situés dans des plans normaux et perpendiculaires au méridien, et n'est suffisamment exacte que pour la réduction des angles horizontaux aux angles des cordes (page 85, Géod.), ou pour convertir dans les formules (B), n° 5, l'arc S en angle. Lors donc qu'il s'agira de trouver la latitude du pié de la perpendiculaire à la méridienne, il sera plus rigoureux d'employer la formule ci-dessus.

Je viens d'exprimer en fonction de l'abscisse x la latitude du pié de la perpendiculaire à la méridienne; il n'est pas moins important de connaître le développement d'un arc de cette perpendiculaire, suivant les puissances ascendantes de cette même variable. Soit donc φ l'amplitude de l'arc y dont il s'agit; on a à la latitude l du centre de la carte

$$\varphi = \frac{y}{r}, \quad \text{(art. 79, Géod.)},$$

et à une distance x de ce lieu,

$$\varphi = \frac{y}{r} + d.\left(\frac{y}{r\,dx}\right)x + \tfrac{1}{2}\,d^2.\left(\frac{y}{r\,dx^2}\right)x^2 + \ldots;$$

mais par ce qui précède, $\frac{y}{r} = y\,\frac{(1-e^2\sin^2.l)^{\frac{1}{2}}}{a}$, par conséquent,

$$d.\left(\frac{y}{r\,.\,dx}\right) = -\tfrac{3}{2}e^2\frac{\sin 2l}{a^2}.\frac{r'y}{r};$$

de là et en se bornant à la première puissance de x,

$$\varphi = R''\frac{y}{r}\left(1 - \tfrac{1}{2}.\frac{r'^2}{a^2}.e^2\sin 2l.\frac{x}{r}\right). \qquad (2)$$

Il est rare, dans la pratique, que l'on ait besoin d'un plus grand nombre de termes; cependant un ingénieur-géographe, de mes amis, M. Plessis, qui s'est occupé des mêmes recherches, a jugé à propos de continuer le développement des séries (1) et (2), en rejetant toutefois les termes de l'ordre e^4: voici le résultat de ses calculs:

$$\Delta l = R\frac{x}{r}\left\{1 - \tfrac{3}{4}\frac{x}{r}.\frac{e^2\sin 2l}{1-e^2\sin^2.l} - \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{r^2}.\frac{e^2\cos 2l}{1-e^2\sin^2.l} + \tfrac{1}{4}\frac{x^3}{r^3}.\frac{e^2\sin 2l}{1-e^2\sin^2.l}\right\} \qquad (1')$$

$$\varphi = R\frac{y}{r}\left\{1 - \tfrac{1}{2}\frac{x}{r}.\frac{e^2\sin 2l}{1-e^2\sin^2.l} - \tfrac{3}{2}\frac{x^2}{r^2}.\frac{e^2\cos 2l}{1-e^2\sin^2.l} + \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{r^3}.\frac{e^2\sin 2l}{1-e^2\sin^2.l}\right\} \qquad (2').$$

Si l'on désigne toujours par l la latitude du lieu central, par L et L' les latitudes respectives du pié et de l'extrémité de la perpendiculaire y; par P la différence de longitude de ces points, on aura ensuite

$$L = l + \Delta l, \qquad \operatorname{tang} P = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\cos L},$$

$$\sin(L-L') = \sin L \sin\varphi \operatorname{tang}\frac{P}{2}(1+e^2\cos^2 L),$$

ou

$$\sin(L-L') = \sin L' \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\frac{P}{2}(1+e^2\cos^2 L').$$

Ces trois dernières formules sont exactes et doivent, par cette raison, être substituées à celles (C), lorsque les points de la carte sont très-éloignés du méridien principal ; j'en donnerai plus loin les démonstrations.

M. Plessis observe que quelque longues et compliquées que paraissent les équations $(1')$ $(2')$, on peut cependant en abréger beaucoup l'application, en calculant d'avance les coefficiens des différentes puissances de x et y : c'est ce qu'il a fait pour Paris, où $l = 48°.50'.14'' = 0^g,54263580$. Les équations citées prennent alors la forme

$$\Delta l = x(A - Bx + Cx^2 + Dx^3); \quad \varphi = y(A' - B'x + C'x^2 + D'x^3),$$

et l'on a

$\log.A = \bar{7},2895625$	$\log.A' = \bar{7},2884324$
$\log.B = \overline{16},4245059$	$\log.B' = \overline{16},2472845$
$\log.C = \overline{24},8636294$	$\log.C' = \overline{24},8624993$
$\log.D = \overline{30},9187494$	$\log.D' = \overline{29},0425580.$

Les deux premiers termes suffiront pour la France. Ces logarithmes appartenant à des fractions, leurs caractéristiques sont négatives. *Je fais cette remarque, parce que je n'emploie, dans tout le cours de cet ouvrage, que des logarithmes entièrement positifs.*

x et y, dans ces expressions, doivent être évaluées en toises ; il est facile de modifier les coefficiens A, B, etc., A', B', etc. pour le cas où x et y seraient données en mètres.

Δl et φ expriment des parties décimales du quart de cercle, c'est-à-dire que les angles qu'ils représentent sont évalués en angle droit, parce que l'on a pris $R = 0^g,63661977$ (art. 31, Géod.). Quant aux angles P et $L-L'$, leur évaluation dépendra de l'espèce de table trigonométrique dont on fera usage.

Cet habile ingénieur se propose de publier, dans un des numéros du Mémorial du Dépôt général de la Guerre, d'autres formules utiles en Géodésie.

Formules plus exactes que les précédentes, ou résolution des triangles sphéroïdiques.

7. Lorsqu'on examine avec attention le principe de la méthode employée dans les deux articles précédens, on reconnaît bientôt qu'il repose sur une considération dont l'exactitude n'est pas rigoureuse. En effet, par rapport au sphéroïde elliptique de révolution, la ligne tracée sur sa surface par les opérations géodésiques, ou celle que l'on considère comme la route d'un rayon de lumière qui va d'un point à un autre, est une ligne de plus courte distance et à double courbure, à moins qu'elle ne coïncide avec le méridien ou l'équateur (art. 71, Géod.). Les deux élémens extrêmes de cette ligne ne sont donc pas en général dans le même plan. Cependant nous avons supposé jusqu'à présent que la perpendiculaire à la méridienne, ou qu'une ligne géodésique quelconque était située toute entière dans le plan vertical passant par ses deux extrémités. A la vérité, l'erreur provenant de cette hypothèse est presque nulle dans la pratique; mais pour détruire le doute que l'on pourrait former à cet égard, M. Legendre a donné récemment une analyse complète des triangles sphéroïdiques. Les principaux résultats auxquels ses savantes recherches l'ont conduit sont, que dans tous les cas où le réseau triangulaire s'étend sur une surface quelconque, mais peu différente de celle d'une sphère, son théorème, relatif aux triangles sphériques très-petits, a lieu (art. 39, Géod.), et que les formules (*B*) (*C*) donnent assez exactement la grandeur de la ligne la plus courte qui joint les points extrêmes de ce réseau, ainsi que la direction azimutale de cette ligne à l'égard des côtés du dernier triangle. Afin que les géomètres qui ne seraient pas à même de pouvoir consulter le mémoire de M. Legendre, puissent vérifier eux-mêmes ces résultats; nous allons donner les formules qui conviennent exactement au sphéroïde de révolution, et qui sont analogues à celles (*C*).

Fig. 4. Si, dans le triangle sphéroïdique *PAM* rectangle en *A*, et dont le sommet *P* représente le pôle, on appelle, comme ci-dessus,

L la latitude vraie du point *A*,
L' celle du point *M*,
P l'angle *APM* qui mesure la différence de longitude,
M l'azimut *AMP*,
s la plus courte distance *AM*;

que l'on prenne les deux variables auxiliaires λ, λ' nommées *latitudes réduites*

des points respectifs A, M, et deux autres variables x, y; que l'on désigne en outre par

a le rayon de l'équateur,

b le demi-axe;

enfin que l'on fasse

$$a^2 = b^2(1+\epsilon), \quad \text{ou} \quad \frac{a^2}{b^2} - 1 = \epsilon,$$

on aura

$$\operatorname{tang}\lambda' = \frac{b}{a}\operatorname{tang} L',$$

réciproquement

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang} L' &= \frac{a}{b}\operatorname{tang}\lambda' \\ \text{et}\qquad \sin\lambda' &= \sin\lambda\cos x\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a')$$

puis

$$\operatorname{tang} y = \frac{\operatorname{tang} x}{\cos\lambda}. \qquad (b')$$

$$P = y - x\cos\lambda\left(\tfrac{1}{2}\epsilon - \tfrac{3}{8}\epsilon^2\right) + \left(x + \tfrac{1}{2}\sin 2x\right)\left(\tfrac{1}{16}\epsilon^2\sin^2.\lambda\cos\lambda\right) \ldots (e')$$

$$s = bx\left(1 + \tfrac{1}{4}\epsilon\sin^2.\lambda - \tfrac{3}{64}\epsilon^2\sin^4.\lambda\right) + b\sin 2x\left(\tfrac{1}{8}\epsilon\sin^2.\lambda - \tfrac{1}{32}\epsilon^2\sin^4.\lambda\right) - b\sin 4x\left(\tfrac{1}{256}\epsilon^2\sin^4.\lambda\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (f')$$

enfin

$$\sin M = \frac{\cos\lambda}{\cos\lambda'}. \qquad (h')$$

Ces formules renferment les solutions des différens problèmes que l'on peut se proposer sur le triangle sphéroïdique rectangle APM, et peuvent servir à vérifier celles (C) qu'elles remplacent. Supposons, par exemple, qu'étant connues la latitude L du point A et la perpendiculaire $s = AM$, il s'agisse de trouver, d'après ces deux élémens et l'angle droit A, les trois autres élémens du triangle, savoir, la longitude $P = APM$, la latitude L' du point M et l'azimut $M = AMP$.

On déterminera x à l'aide de la formule (f'), qui donne

$$x = \frac{s}{b}\left(1 - \tfrac{1}{4}\epsilon\sin^2.\lambda + \tfrac{7}{64}\epsilon^2\sin^4.\lambda\right) - \sin 2\left(\frac{s}{b}\right)\left(\tfrac{1}{8}\epsilon\sin^2.\lambda - \tfrac{3}{16}\epsilon^2\sin^4.\lambda\right) + \frac{s}{b}\cos 2\left(\frac{s}{b}\right)\left(\tfrac{1}{16}\epsilon^2\sin^4.\lambda\right) + \sin 4\left(\frac{s}{b}\right)\left(\tfrac{5}{256}\epsilon^2\sin^4.\lambda\right) \ldots\ldots\ldots (g').$$

x étant connu, on aura y par l'équation (b'), et de là la longitude P par l'équation (e'), ensuite l'azimut M, c'est-à-dire l'angle que la courbe AM fait avec le méridien du point M, se déduira de l'équation (h').

Voici par quelle voie analytique on parvient à ces formules. On sait, page 192, Géod., que si une surface courbe a pour équation $u = 0$, l'une des équations de la plus courte distance sur cette surface est

$$\left(\frac{du}{dx}\right) ddy - \left(\frac{du}{dy}\right) ddx = 0.$$

Or l'équation du sphéroïde terrestre supposé de révolution est, en prenant l'axe des z pour celui de rotation,

$u = x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha(-1 + x^2 + y^2) = 0$, (page 142, note, Géod.)

d'où l'on tire

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 2x(1 - 2\alpha); \qquad \left(\frac{du}{dy}\right) = 2y(1 - 2\alpha).$$

De là l'équation de la plus courte distance devient

$$x\,ddy - y\,ddx = 0.$$

Intégrant et désignant par c la constante, par s la ligne que l'on considère, on obtient

$$x\,dy - y\,dx = c\,ds.$$

D'ailleurs, nous avons trouvé (page 193, Géod.) que

$$x\,dy - y\,dx = r^2 . \sin^2\theta\, d\varphi;$$

si donc on fait $CT = t$, $TM = q$ et $CM = r$, on aura, en égalant les deux valeurs de $x\,dy - y\,dx$,

$$q^2 d\varphi = c\,ds,$$

φ désignant la différence des méridiens, différence que nous avons représentée plus haut par P.

Pour trouver maintenant le sinus de l'angle azimutal M, on remarquera que puisque l'arc Am est une portion d'un parallèle à l'équateur, les élémens semblables de ces courbes sont entre eux comme leurs rayons TA ou TM, et $CF = 1$: on a donc

$$1 : q :: d\varphi : d.(Am) = q\,d\varphi.$$

De plus, le triangle élémentaire $m'aM$ pouvant être considéré comme rectiligne et rectangle en m', on a

$$\sin M = \frac{q\,d\varphi}{ds}.$$

On voit, par ce résultat, que la propriété de la ligne la plus courte est de rendre $q \sin M$ constant : or au point A, on a $M = 100^{gr}$ et $\sin M = 1$; ainsi la constante c est égale à AI, valeur initiale de q.

D'un autre côté, il est facile de voir que

$$ds^2 = dq^2 + q^2 d\varphi^2 + dt^2.$$

Substituant ici pour ds sa valeur $\frac{q^2 d\varphi}{c}$, on a

$$d\varphi = \frac{c\sqrt{(dt^2 + dq^2)}}{q\sqrt{(q^2 - c^2)}},$$

et par suite

$$ds = \frac{q\sqrt{(dt^2 + dq^2)}}{\sqrt{(q^2 - c^2)}}.$$

Avant d'intégrer ces équations, il faudra en éliminer l'une des variables t, q, à l'aide de l'équation

$$q^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - t^2),$$

qui est celle du méridien. Mais pour parvenir aux résultats les plus simples, il conviendra d'employer une nouvelle variable λ', telle qu'on ait CT ou $t = b \sin \lambda'$; il en résultera évidemment $q = a \cos \lambda'$, et la substitution de ces valeurs donnera, parce que φ augmente quand λ' diminue,

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= -\frac{c}{a} \cdot \frac{d\lambda' \sqrt{(a^2 \sin^2 \lambda' + b^2 \cos^2 \lambda')}}{\cos \lambda' \sqrt{(a^2 \cos^2 \lambda' - c^2)}}. \\ ds &= -\frac{ad\lambda' \cdot \cos \lambda' \sqrt{(a^2 \sin^2 \lambda' + b^2 \cos^2 \lambda')}}{\sqrt{(a^2 \cos^2 \lambda' - c^2)}}. \end{aligned}\right\} (b').$$

La variable auxiliaire λ' se déduit immédiatement de la latitude L' du point M ; car à cause de $TM = a \cos \lambda'$ et de $CT = b \sin \lambda'$, on a pour la sous-normale de ce point

$$TO = \frac{a^2}{b^2} \cdot b \sin \lambda' = \frac{a^2}{b} \cdot \sin \lambda',$$

et de là

$$\frac{TO}{TM} \text{ ou } \operatorname{tang} L' = \frac{a}{b} \operatorname{tang} \lambda' ;$$

donc réciproquement

$$\operatorname{tang} \lambda' = \frac{b}{a} \operatorname{tang} L'.$$

M. Legendre appelle λ' la *latitude réduite*, parce que sur le sphéroïde aplati elle est en général moindre que L'.

Si l'on nomme pareillement λ la latitude réduite qui correspond à la latitude L

du point A, on aura AI ou $c = a\cos\lambda$, et les équations (b') deviendront

$$d\varphi = -\frac{\cos\lambda}{a}\cdot\frac{d\lambda' V(a^2\sin^2.\lambda' + b^2\cos^2.\lambda')}{\cos.\lambda' V(\cos^2.\lambda' - \cos^2.\lambda)}$$
$$ds = -\frac{d\lambda'.\cos\lambda' V(a^2\sin^2.\lambda' + b^2\cos^2\lambda')}{V(\cos^2.\lambda' - \cos^2.\lambda)}.$$

On voit par ces équations que λ' est compris entre $+\lambda$ et $-\lambda$, et qu'ainsi on peut introduire une nouvelle variable x telle que

$$\sin\lambda' = \sin\lambda\cos x.$$

Substituant cette valeur, et faisant de plus

$$a^2 = b^2(1+\varepsilon),$$

on aura les deux transformées

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= \frac{b.\cos\lambda}{a}\cdot\frac{dx V(1+\varepsilon\sin^2.\lambda\cos^2.x)}{1-\sin^2.\lambda\cos^2.x}\\ ds &= bdx V(1+\varepsilon\sin^2.\lambda\cos^2.x). \end{aligned}\right\}(c')$$

Il reste à déterminer les intégrales approchées de ces deux équations ; or la seconde s'intègre aisément après avoir développé le radical jusqu'aux quantités de l'ordre ε^2 inclusivement, et tout calcul fait, on trouve la formule (f'). Quant à la première équation, elle se trouve dans son état actuel, plus difficile à traiter; mais M. Legendre fait voir, par une méthode fort ingénieuse, qu'elle peut être ramenée à une forme plus simple et plus facile à évaluer de même par approximation. En effet, si on l'écrit ainsi :

$$d\varphi = \frac{b.\cos\lambda}{a}\cdot\frac{Cdx}{1-\sin^2.\lambda\cos^2.x} + \frac{b.\cos\lambda}{a}\cdot\frac{dx[V(1+\varepsilon\sin^2.\lambda\cos^2.x) - C]}{1-\sin^2.\lambda\cos^2.x},$$

il s'ensuivra que la quantité C, qui est introduite dans cette équation, sera arbitraire et pourra être prise de manière qu'on ait

$$1+\varepsilon\sin^2.\lambda\cos^2.x - C^2 = (1-C^2).(1-\sin^2.\lambda\cos^2.x),$$

ce qui donne

$$C^2 = 1-\varepsilon = \frac{a^2}{b^2}, \quad \text{ou} \quad C = \frac{a}{b}.$$

Ainsi le premier terme de la valeur hypothétique de $d\varphi$ se réduit à

$$\frac{dx\cos\lambda}{1-\sin^2.\lambda\cos^2.x};$$

et comme le second terme prend la forme

$$-\frac{dx\cos\lambda\,[a-b\sqrt{(1+\varepsilon\sin^2\lambda\cos^2 x)}]}{a.(1-\sin^2.\lambda\cos^2.x)},$$

on a, en multipliant haut et bas par $a+b\sqrt{(1+\varepsilon\sin^2.\lambda\cos^2.x)}$, et faisant attention que $a^2-b^2=b^2\varepsilon$,

$$-\frac{b^2\varepsilon.\cos\lambda}{a}.\frac{dx}{a+b\sqrt{(1+\varepsilon\sin^2.\lambda\cos^2.x)}};$$

donc la valeur de $d\varphi$ devient

$$d\varphi=\frac{dx\cos.\lambda}{1-\sin^2.\lambda\cos^2.x}-\frac{b^2\varepsilon.\cos\lambda}{a}.\frac{dx}{a+b\sqrt{(1+\varepsilon\sin^2.\lambda\cos^2.x)}}.$$

Enfin prenant l'angle y, d'après la formule

$$\text{tang}\,y=\frac{\text{tang}\,x}{\cos\lambda},$$

et se rappelant que $dy=\frac{d.\text{tang}.y}{1+\text{tang}^2.y}$, d'où $dy=\frac{dx\cos.\lambda}{1-\sin^2.\lambda\cos^2.x}$, on a

$$d\varphi=dy-\frac{b^2\varepsilon.\cos\lambda}{a}.\frac{dx}{a+b\sqrt{(1+\varepsilon\sin^2.\lambda\cos^2.x)}}. \qquad (d').$$

Remplaçant maintenant a par sa valeur $b\sqrt{1+\varepsilon}$, développant jusqu'aux termes de l'ordre ε^2 inclusivement, et intégrant par les méthodes connues, on parvient à la formule (e') rapportée plus haut.

M. Legendre a donné d'autres formules analogues et relatives à un triangle sphéroïdique quelconque : sur quoi voyez les *Mémoires de la Classe des sciences physiques et mathématiques de l'Institut*, premier semestre de 1806, page 130.

8. On parviendrait à conclure des formules de ce savant géomètre, que la différence entre les angles sphériques et sphéroïdiques est moindre de $\frac{1}{60}$ de seconde sexagésimale dans le plus grand des triangles qui ont servi à la nouvelle mesure du méridien, et que la double courbure n'altère pas d'un centimètre, à beaucoup près, la longueur du plus grand de tous les côtés de ces triangles. M. Delambre est aussi parvenu aux mêmes résultats, par des considérations fort simples et tout élémentaires. Voyez à ce sujet, dans le second volume de la *Méridienne*, l'article *Calcul des triangles*.

On pourrait trouver, d'ailleurs, dans les théories que j'ai exposées, le moyen de vérifier ce fait. Par exemple, en supposant que l'on ait observé les latitudes des extrémités d'une ligne géodésique et son azimut, l'équation (q) (page 197,

Géod.), qui est celle de la plus courte distance sur le globe, fera connaître, après les intégrations nécessaires, la longueur s de cette ligne. Si ensuite on calcule cette même distance par la première des formules (B) n° 5; la différence des deux résultats sera l'effet de la double courbure, en supposant toutefois que s soit fort petit par rapport aux dimensions de la terre. Cette méthode serait sans doute très-directe et très-élégante; mais en voici une autre qui est élémentaire, et me paraît devoir remplir le même but.

Soit K une ligne de plus courte distance, divisée en n parties k, k', k''... égales si on veut, et supposons que k soit de $10000^{mèt.}$ au plus, afin que la double courbure ait un effet insensible sur cette longueur. Soit en outre L la latitude de la première extrémité de K, et Z l'azimut du premier côté k de cette ligne. On calculera d'abord de proche en proche les latitudes l', l'', l'''... des extrémités de k, k', k''... et les azimuts z', z''... de ces lignes partielles. On obtiendra par ce moyen la latitude L' de la seconde extrémité de K, sans avoir pour cela négligé les petites déviations causées par la double courbure de la ligne géodésique que l'on considère, puisqu'elles résultent des valeurs de z', z''..... Ensuite l'on prendra, comme ci-dessus, pour inconnue la longueur K, que l'on calculera à l'aide de la première des formules (B) n° 5, et en prenant pour données L, L' et Z. On connaîtra donc encore par cette méthode l'effet de la double courbure sur les longueurs.

Quant à son effet sur les angles, on pourrait, ce me semble, pour l'évaluer, calculer l'angle rectiligne compris entre deux cordes du sphéroïde, puis réduire l'angle sphérique correspondant à l'angle des cordes de la sphère, par le procédé de l'art. 55, Géod.; cela mettrait en évidence la très-petite différence d'un angle à l'autre, et donnerait la conviction que les formules (B) (C) n° 5, sont suffisantes dans le cas où le sphéroïde terrestre est peu différent d'une sphère.

S'il est donc permis, dans les opérations délicates de la mesure de la terre, de traiter les triangles comme sphériques, et de ramener même leur résolution à celle des triangles rectilignes, à l'aide du théorème de Legendre (art. 39, Géod.), il est davantage relativement aux opérations ordinaires de Géodésie. Cependant, afin de pouvoir déduire de celles-ci des résultats précieux pour la Géographie, il importe qu'elles soient appuyées sur les mêmes théories que les travaux de la méridienne de France. Aussi tous les grands levés trigonométriques dirigés par le Dépôt général de la Guerre sont-ils, depuis quelques années, exécutés dans cette vue. Tous se rattachent aux triangles des méridiennes mesurées en Europe, et il y a lieu d'espérer qu'ils produiront dans peu assez de données exactes pour que les savans puissent déterminer d'une manière satisfaisante la figure de la terre, pour toute l'étendue qu'embrasse cette immense ramification.

Expressions de divers rayons de courbure relatifs à l'ellipsoïde de révolution.

9. Quelle que soit la surface courbe que l'on considère, les rayons de plus grande et de plus petite courbure sont toujours, à un point donné, dans la commune section de deux plans normaux perpendiculaires entre eux. Relativement à la terre, considérée comme un ellipsoïde aplati, le plus petit rayon de courbure est dans le plan de la génératrice, c'est-à-dire dans celui d'un méridien, et le plus grand rayon de courbure appartient alors à l'arc perpendiculaire à ce méridien. Le premier de ces deux rayons est, pour la latitude L,

$$r = a\{1-\alpha(2-3\sin^2.L)\} = a\left(1-\frac{\alpha}{2}-\frac{3\alpha}{2}\cos 2L\right)$$

et le plus grand rayon est

$$r' = a\{1+\alpha\sin^2.L\} = a\left(1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\cos 2L\right)$$

(art. 74, Géod.),

a étant le rayon de l'équateur, et α l'aplatissement.

Ces valeurs s'obtiennent aussi fort élégamment par l'analyse de l'art. 100 (Géod.). D'abord dans le sens du méridien le rayon osculateur est en général

$$r = 1 + \alpha u' + \alpha\left(\frac{ddu'}{dL^2}\right).$$

Or l'équation de cette courbe génératrice étant

$$x^2 + y^2 - 1 - 2\alpha(x^2-1) = 0,$$

on a

$$u' = x^2 - 1 = \frac{\cos^2.L}{1-e^2\sin^2.L} - 1 = -\sin^2.L + e^2\cos^2.L\sin^2.L.$$

Si l'on différentie deux fois de suite u' et qu'on néglige les termes en e^2, on trouvera

$$\frac{du'}{dL} = -2\sin.L\cos.L, \qquad \frac{ddu'}{dL^2} = -2\cos^2.L + 2\sin^2.L;$$

donc

$$r = 1 - \alpha (2 - 3 \sin^2 . L)$$

En second lieu, à l'origine de l'arc perpendiculaire au méridien

$$r' = 1 + \alpha u'_1 - \alpha \left(\frac{du'_1}{dL}\right) \text{tang} L ,$$

substituant pour u'_1 et $\left(\frac{du'_1}{dL}\right) \text{tang} L$ leurs valeurs précédentes, on a, comme ci-dessus,

$$r' = 1 + \alpha \sin^2 . L .$$

On sait, par l'analyse du même article, que le rayon osculateur d'une ligne géodésique faisant l'angle V avec celle qui est perpendiculaire au méridien, a pour longueur

$$R = \frac{r+r'}{2} + \frac{r'-r}{2} \cos 2V ,$$

ou bien en désignant par V' l'inclinaison du premier côté de la ligne géodésique sur le méridien,

$$R = \frac{r+r'}{2} - \frac{r'-r}{2} \cos 2V' .$$

Ainsi en vertu des valeurs précédentes de r et r' cette longueur devient

$$R = a [1 - \alpha (\cos 2L - \cos^2 . L \cos 2V')] ,$$

ou autrement

$$R = a [1 - \alpha (\cos 2L + \cos^2 . L \cos 2V')] .$$

Quoique les déterminations précédentes ne soient qu'approximatives, elles sont presque toujours suffisantes dans la pratique.

L'expression rigoureuse du rayon osculateur du méridien, c'est-à-dire,

$$r = a (1 - e^2) (1 - e^2 \sin^2 . L)^{-\frac{3}{2}} ,$$

étant développée par la méthode de l'art. 78 (Géod.), fournit cette série

$$\log r = 6,80387\ 7927 - 0,00195\ 33480 \cos 2L + 0,00000\ 14643 \cos 4L - 0,00000\ 00014 \cos 6L,$$

laquelle sert principalement pour réduire en minutes ou en secondes un petit arc du méridien exprimé en mètres, comme nous l'avons déjà observé n° 6, et comme nous le ferons voir plus particulièrement par la suite.

L'expression du rayon de courbure de l'arc perpendiculaire au méridien, réduite de même en série, conduit à la formule

$$\log r' = 6,80518\ 11363 - 0,00065\ 11160 \cos 2L + 0,00000\ 04881 \cos 4L - 0,00000\ 00048 \cos 6L$$ (art. 81, Géod.).

Quant à la valeur exacte du rayon osculateur d'une ligne géodésique quelconque, elle est, (Calc. diff. de *Lacroix*, page 476, tome I),

$$R = \frac{rr'}{r\cos^2.V + r'\sin^2.V};$$

et peut aisément se mettre sous la forme

$$R = \frac{2rr'}{r + r' - (r' - r)\cos 2V};$$

De là on tirerait assez exactement

$$R = \frac{rr'\left(\frac{r+r'}{2} + \frac{r'-r}{2}\cos 2V\right)}{(r+r')^2};$$

expression qui ne diffère de celle donnée plus haut que par le facteur $\frac{rr'}{(r+r')^2}$, dont la valeur est à peu de chose près égale à l'unité, relativement au sphéroïde terrestre.

On a souvent besoin de connaître, pour un point donné sur la terre, le rayon de la sphère dont la surface en ce point s'écarte le moins possible de celle du sphéroïde. Or ce rayon, dont nous désignerons la longueur par ρ', doit être normal à l'horizon du

lieu dont il s'agit, et en même temps le *moyen* entre ceux de toutes les sections normales qu'il est possible de faire par le centre de ce même lieu; si donc L est la latitude du centre de la surface que l'on considère, on aura en général pour l'expression du rayon de courbure d'une section quelconque passant par ce point

$$R=\frac{r+r'}{2}-\frac{r'-r}{2}\cos 2V'.$$

La section serait particularisée en assignant une valeur à l'angle V'; mais puisque l'on a en vue de connaître l'expression moyenne de ρ', on l'obtiendra en multipliant le second membre de l'équation précédente par dV', puis intégrant entre les limites $V'=0$ et $V'=400^{gr}$, et divisant cette intégrale définie par 400^{gr}.

En effet, on a d'abord

$$\int dV'\left(\frac{r+r'}{2}-\frac{r'-r}{2}\cos 2V'\right)=\int dV'(m-n\cos 2V'),$$

et pour intégrale indéfinie,

$$mV'-\frac{n}{2}\sin 2V';$$

laquelle s'évanouit lorsque $V'=0$; mais en y faisant $V'=400^{gr}$ et divisant par 400^{gr}, on obtient

$$\rho'=m=\frac{r+r'}{2}=(1-\alpha\cos 2L).a,$$

et en nombres on trouve

$$\log\rho'=6,8045295316-0,00130\ 22320\cos 2L+0,00000\ 09762\cos 4L.$$

Ainsi le rayon cherché est moyen arithmétique entre ceux de plus grande et de plus petite courbure.

Si, au lieu d'employer la valeur approchée de R, on faisait usage de sa valeur exacte donnée ci-dessus, on trouverait au contraire que ρ' est moyen géométrique entre r et r'; mais ces deux résultats, vu la très-petite différence qui existe entre les

rayons de plus grande et de plus petite courbure, peuvent être considérés comme identiques.

Lorsque l'on dénote par 1^G la longueur du grade sur une sphère dont le rayon $= 1$ et la demi-circonférence $= \pi$, l'expression $1^G.\rho'$ est celle du grade sur la sphère dont ρ' désigne le rayon. Or à cause de $1^G = \frac{\pi}{200}$, on a pour le grade d'un des grands cercles de la sphère dont il s'agit,

$$\frac{\pi}{200}.\rho' = \frac{\pi}{200}.a(1 - \alpha \cos.2L),$$

ou plus exactement et en nombres,

$$\log \text{ d'un grade} = 5,00064\ 94086 - 0,00130\ 22320 \cos.2L + 0,00000\ 09762 \cos.4L.$$

M. Hachette s'est occupé de la recherche de quelques propriétés des rayons de courbure des surfaces, comme on peut le voir dans le n° 7 de la *Correspondance sur l'Ecole Impériale Polytechnique.*

Formules de vérification et de correction.

10. Les élémens des calculs trigonométriques sont si multipliés lorsque l'on a une longue suite de triangles à résoudre, qu'il n'est pas rare de commettre quelque erreur sur la longueur des coordonnées des extrémités des côtés. Cependant, comme c'est de l'exactitude de ces mêmes coordonnées que dépend celle des latitudes, longitudes et azimuts des objets terrestres, et réciproquement, *il est important* d'avoir des formules de vérification et de connaître les relations qui existent entre les variations de ces quantités, afin que si l'on se trouve dans la nécessité d'altérer quelques-unes d'entre elles, on puisse, de la manière la plus simple, évaluer les corrections qui leur sont propres. Je vais rappeler et démontrer à cette occasion deux formules fort simples, obtenues par M. Prony, pour calculer rigoureusement, et dans tous les cas, l'excès de l'hypoténuse d'un triangle sphérique sur un des côtés de l'angle droit.

Je désignerai, comme à l'ordinaire, par A, B, C les angles d'un triangle sphérique supposé rectangle en A, et par a, b, c

les côtés opposés à ces angles. Cela posé, puisque ce triangle donne, d'une part,

$$\sin.a = \frac{\sin.b}{\sin.B}, \text{ et de l'autre, } \cos B = \frac{\text{tang}.c}{\text{tang}.a}, \quad (*)$$

on a, en changeant les tangentes en sinus et cosinus,

$$\sin c.\cos.a = \cos.B \cos.c \sin.a = \cos.B \cos.c.\frac{\sin.b}{\sin.B};$$

ainsi substituant pour $\sin.a$ et $\sin.c \cos.a$ leurs valeurs, dans la formule connue

$$\sin(a-c) = \sin.a \cos.c - \cos.a \sin.c,$$

il viendra, à cause de $\frac{1-\cos B}{\sin B} = \text{tang}\frac{B}{2}$,

$$\sin(a-c) = \sin b \cos c \,\text{tang}\frac{B}{2}, \qquad (1)$$

résultat qui, en y mettant au lieu de $\cos.c$ sa valeur $\frac{\cos.a}{\cos.b}$, se change en celui-ci:

$$\sin(a-c) = \text{tang}\, b \cos a \,\text{tang}\frac{B}{2}. \qquad (2)$$

Considérant B comme le pôle, c comme le méridien principal, et dénotant par L, L' les latitudes respectives des points A, C; par P l'angle B et par y le côté b, les deux formules précédentes, rendues d'ailleurs applicables au sphéroïde terrestre, n° 5, prennent respectivement la forme

$$\sin(L-L') = \sin y \sin L \,\text{tang}\frac{P}{2}(1+e^2\cos^2.L)$$

$$\sin(L-L') = \text{tang}\, y \sin L' \,\text{tang}\frac{P}{2}(1+e^2\cos^2.L').$$

M. Prony, qui les a publiées sans démonstration dans la *Connaissance des Temps* pour l'an 1808, en a fait usage pour la construction d'une carte du cours du Pô; on les obtient encore en par-

(*) Il est remarquable qu'à l'aide de ces deux équations on résoudrait facilement ce problème: *Étant données la latitude et la longitude d'un point, trouver ses coordonnées par rapport à la méridienne et à la perpendiculaire de tout autre point connu.*

tant de la propriété du triangle ABC, dont le supplément d'un des angles obliques serait divisé en deux parties égales par un arc de grand cercle.

Des formules (1) et (2) l'on conclut sur-le-champ, en y changeant les b en c et *vice versâ*,

$$\sin(a-b) = \sin c \cos b \operatorname{tang} \frac{C}{2}$$

$$\sin(a-b) = \operatorname{tang} c \cos a \operatorname{tang} \frac{C}{2};$$

puis en vertu de la notation adoptée, l'on a

$$\cos(L'+y) = \cos L \cos y \operatorname{tang} \frac{z'}{2}$$

$$\cos(L'+y) = \cot L \sin L' \operatorname{tang} \frac{z'}{2};$$

et de cette dernière on tire

$$\operatorname{tang} \frac{z'}{2} = \frac{\cos(L'+y) \operatorname{tang} L}{\sin L'},$$

z' étant l'azimut de la perpendiculaire y, ou l'angle ACB. Cette formule comporte toutes les valeurs possibles de z', et s'applique sans aucun changement au sphéroïde terrestre, par la raison donnée à l'art. 79, Géod. On pourra l'employer concurremment avec les deux précédentes, pour vérifier les résultats fournis par la méthode de M. Legendre. Dans chacune de ces formules on a besoin de réduire en angle l'arc y de la perpendiculaire à la méridienne; or c'est ce qui se pratique à l'aide de la formule $\varphi = \frac{R''y}{r'}$, r' étant le rayon osculateur de y, n° 9. La latitude L du pié de la perpendiculaire s'obtient au moyen de la formule donnée, n° 6, et l'angle P à l'aide de l'équation

$$\operatorname{tang} P = \frac{\operatorname{tang} y}{\cos L},$$

démontrée, art. 79, Géod.

Trouver la distance des parallèles passant par les extrémités d'un arc perpendiculaire au méridien.

Soit MN le parallèle du point M, et $Mm = y$ la perpendiculaire au méridien PA : il s'agit de déterminer mN. Pour cet effet, Fig. 5.

dénotons par L la latitude de m, par L' celle de M ou de N, et par (x) l'arc mN; cet arc, qui est toujours fort petit, sera donné par la formule

$$(x) = 100000^{mèt}\left\{L-L'-\frac{300}{\pi}\alpha\sin(L-L')\cos(L+L')\right\},$$

démontrée page 137, Géod. Si les latitudes étaient exprimées en degrés, on aurait au contraire,

$$(x) = 111111^{mèt}\left\{L-L'-\frac{270}{\pi}\alpha\sin(L-L')\cos(L+L')\right\}.$$

Dans le premier cas, le dernier terme de la première formule sera réduit en grades ou en secondes de grades, en y faisant

$$\log\frac{300}{\pi}\alpha = 9,4562249, \quad \text{ou} \quad = 3,4562249;$$

dans le second cas, le dernier terme de la deuxième formule sera réduit en degrés ou en secondes de degrés, en y faisant

$$\log\frac{270}{\pi}\alpha = 9,4104674, \quad \text{ou} \quad = 2,9667699.$$

Pour ce qui est de la différence $L-L'$, il est nécessaire qu'elle soit toujours exprimée en grades ou degrés.

Soit, pour exemple, $L = 50^{gr},1090$; $L' = 49^{gr},7956$; on aura, en vertu de la première formule ci-dessus,

$$\log\frac{300\alpha}{\pi} = 3,4562$$
$$\text{l.sin}(L-L') = 7,6922$$
$$\text{l.cos}(L+L') = 7,8760$$
$$8,3244 = 0^{m},021$$

2me facteur { 1er terme $L-L'$ ..... $0^{gr},3134''$; 2e terme ..... — $0,021$

valeur du 2me facteur $= 0^{gr},3133'',979$.

Donc

$$(x) = 100000^m \times 0,3133979 = 31339^m,79.$$

Dans les opérations géodésiques, la perpendiculaire y n'est jamais assez grande pour donner une valeur de (x) aussi considérable.

Ce problème est principalement utile pour connaître les longueurs des arcs du méridien, compris entre les parallèles des points dont on a observé les latitudes (art. 72 et 76, Géod.). Supposons, par exemple, que l'on connaisse par l'observation les latitudes des points M, M' peu éloignés de la méridienne PA, et que le point M' soit méridional par rapport à M. En concevant des parallèles MN, $M'N'$ à l'équateur, menés par ces points, l'arc NN' du méridien intercepté entre ces parallèles, sera évidemment

$$= mm' - (x) + (x_1);$$

les quantités (x) et (x_1) désignant respectivement les petits arcs mN, $m'N'$. Quant à la longueur de l'arc mm', elle dérive nécessairement des distances des points M, M' à la perpendiculaire du point A ou de tout autre point donné sur la méridienne PA.

La valeur de l'expression $mm' - (x) + (x_1) = NN'$ s'obtient aussi par la méthode de M. Delambre, exposée à la note de la page 160, Géod.: voilà donc un moyen de vérification.

Trouver l'effet que produit sur la latitude, la longitude et l'azimut, une petite variation dans les distances d'un point à la méridienne et à sa perpendiculaire.

Supposant L constante dans la valeur de (x) ci-dessus, et faisant abstraction du signe de L', on a par la différenciation

$$d(x) = 100000\,dL', \quad \text{d'où} \quad dL' = \frac{d(x)}{100000},$$

dL' serait ici exprimée en grades; pour l'avoir en secondes centésimales, il est évident qu'il faut écrire

$$dL' = \frac{d(x)}{10}.$$

Si, dans l'hémisphère boréal, l'arc (x) augmente ou diminue vers

le nord, dL' sera positive ou négative; mais si cet arc augmente ou diminue vers le sud, dL' sera négative ou positive. Il serait encore plus exact d'employer à cette conversion la formule.

$$dL' = \frac{R'' d(x)}{r},$$

r étant le rayon de courbure du petit arc $d(x)$.

Maintenant, si l'on différencie la première équation (C), n° 5, par rapport à y seulement, on aura, en négligeant le dernier terme relatif à l'excentricité de la terre,

$$dL' = -\frac{R'' y dy}{r^2} \text{tang } L;$$

la correction de la latitude du sommet de la perpendiculaire est donc négative quand la variation de cette perpendiculaire est positive.

La deuxième équation (C) fournit par la même méthode

$$dP = \frac{R'' dy}{r \cos L},$$

et la troisième équation donne

$$dz' = -\frac{R'' dy}{r} \text{tang } L.$$

On trouverait avec non moins de facilité des relations entre dy et chacune des variations dL', dP, dz', dans le cas où la latitude L serait elle-même variable; mais il serait plus commode, alors, de refaire en entier le calcul des formules (C).

CHAPITRE II.

Formules pour calculer les différences de niveau.

Méthode trigonométrique.

11. Les chapitres XV et XVI du livre III du Traité de Géodésie ne laissant rien à desirer sur le calcul des petites différences de niveau, par les méthodes géométriques, je me bornerai en ce moment à donner une démonstration élémentaire de l'une des formules dues à M. Laplace, pour déterminer trigonométriquement les hauteurs des montagnes très-élevées au-dessus de l'horizon de l'observateur, ou du niveau de la mer. J'ai donné (art. 136, Géod.) quelques détails utiles sur l'application de ces formules; ainsi, pour éviter les redites à cet égard, j'y renverrai le lecteur.

Soit $ZAB' = \delta$ la distance au zénit observée, $B'AB = \Delta\delta$ l'angle de ré- Fig. 6.
fraction, et $DB' = z$ la hauteur de l'objet au-dessus de l'horizon de l'observateur, et calculée sans avoir égard à la réfraction. $BD = z - BB' = z - \Delta z$ sera la hauteur vraie cherchée, et par l'art. 106 (Géod.) on aura

$$z = K \cot(\delta - \tfrac{1}{2}\varphi),$$

K étant, au niveau de la mer, l'arc de grand cercle compris entre les deux verticales ZA, B'D faisant l'angle φ.

Cela posé, comme pour des hauteurs au-dessus de 12^{gr} ou des distances au zénit moindres que 88^{gr}, la valeur de la réfraction terrestre, aussi bien que celle de la réfraction astronomique, ne dépend que des hauteurs du baromètre et du thermomètre dans le lieu de l'observation, l'on a à fort peu-près

$$\Delta\delta = \alpha \operatorname{tang}\delta, \qquad \text{(art. 118, Géod.)}$$

$\Delta\delta$ étant la réfraction pour une distance au zénit apparente δ, et α un coefficient constant que l'expérience fait connaître. (Consultez aussi sur ce sujet l'*Astronomie physique* de Biot, page 154.)

D'un autre côté, le triangle $AB'D$, qui peut-être supposé rectangle en D dans la détermination de Δz, fournissant l'équation

$$K = \frac{z}{\cos \delta},$$

et le triangle $B'AB$ donnant la proportion

$$\sin B' : AB :: \sin B'AB : BB',$$

ou assez exactement

$$\sin \delta : K :: \frac{\Delta \delta}{R''} : \Delta z,$$

il s'ensuit que l'on a

$$\Delta z = \frac{K . \Delta \delta}{R'' . \sin \delta} = \frac{z . \Delta \delta}{R'' \sin \delta . \cos \delta},$$

puis après avoir substitué pour $\Delta \delta$ sa valeur précédente,

$$\Delta z = \frac{\alpha z}{R'' \cos^2 . \delta},$$

R'' étant le rayon réduit en secondes.

Il résulte d'un grand nombre d'observations astronomiques comparées par Delambre, qu'à la température de la glace fondante et sous la pression $0^m,76$ de l'atmosphère, la réfraction à 50^{gr} de hauteur apparente, est

$$\alpha = 187'',087,$$

division centésimale (*Astron. physiq.* de Biot, pag. 156 et 157), et en parties du rayon

$$\alpha = 0,00029\ 3876;$$

partant, pour cette température et cette pression

$$\Delta z = \frac{0,00029\ 3876}{\cos^2 . \delta}\ z.$$

Mais le coefficient α doit éprouver une correction due à tout autre état de l'air; car suivant l'expérience, les réfractions, toutes choses égales d'ailleurs, sont proportionnelles à la densité de l'air, laquelle, à température égale, est elle-même proportionnelle à la pression de l'atmosphère ou à la hauteur du baromètre; de plus, à masses égales, le rapport des densités est inverse de celui des volumes. Donc si 1 représente un volume d'air à zéro de température, ce volume deviendra $1 + 0,00375 . t$ à la température t, la quantité $0,00375$ étant la dilatation de l'air pour un degré du thermomètre centigrade; et l'on aura pour la densité D de l'air à cette température, celle qui répond au terme de la glace fondante étant désignée par $D_{(0)}$, on aura, dis-je,

$$D = \frac{D_{(0)}}{1 + 0,00375 . t};$$

ensuite, si l'on fait la correction due à la hauteur h du baromètre, on obtiendra, en ayant en outre égard à la dilatation du mercure du baromètre (art. 136, Géod.)

$$D = \frac{D_{(0)} \cdot h}{0^m,76(1+0,00375.t)\left(1+\frac{t}{5412}\right)}.$$

Concluons de là que pour l'état actuel de l'air

$$\Delta z = \frac{0,00029\,3876.h}{0^m,76\,(1+0,00375.t)\left(1+\frac{t}{5412}\right)} \cdot \frac{z}{\cos^2 \delta}.$$

Tel est un des résultats auxquels l'illustre auteur de la Mécanique céleste a été conduit par une savante analyse, et après de profondes recherches sur la théorie des réfractions atmosphériques. (*Livre X*, page 280.)

Méthode barométrique.

12. La rapidité avec laquelle j'ai été obligé de rédiger l'art. 111 de la première partie de cet Ouvrage, ne m'a pas permis de donner à la théorie du baromètre qui y est exposée, tout le développement élémentaire dont elle est susceptible; aussi vais-je la reprendre en entier, en suivant la marche qui me paraît la plus simple; mais pour tout ce qui a rapport à ses applications, l'on pourra consulter l'article cité.

Considérons une colonne verticale d'air à la température de la glace fondante, et une molécule d'une densité $= D_1$, située à une distance $a+z$ du centre de la terre, a étant la distance du même centre à la station inférieure de l'observateur. Nommons g la pesanteur et p la pression de l'atmosphère dans le lieu de la molécule, exercée sur l'unité de surface. On aura pour la condition de l'équilibre du fluide pesant et élastique dont il s'agit

$$dp = -gD_1 dz. \quad \text{(Théorie du Nivel.)}$$

La pression p varie proportionnellement à la densité D_1 de la molécule, multipliée par sa chaleur, que nous désignerons par l, l exprimant dans l'hypothèse actuelle la température de la glace; ainsi l'on a

$$p = KD_1 l,$$

K étant un coefficient constant donné par l'expérience.

Divisant ces deux équations l'une par l'autre, il vient

$$\frac{dp}{p} = -g\frac{dz}{Kl};$$

et intégrant l'on a

$$\int g\frac{dz}{l} = -K\int\frac{dp}{p} + Q = -K\log.p + Q.$$

La constante Q se détermine en faisant $z=0$, et comme, à cette origine, la pression de l'atmosphère est p', il s'ensuit que

$$Q = K\log.p' ;$$

partant,

$$\int g\frac{dz}{l} = K(\log.p' - \log.p) = K\log.\frac{p'}{p}. \qquad (1)$$

L'intensité de la pesanteur étant réciproque au quarré des distances, si l'on désigne par g' la pesanteur à la station inférieure, on aura à fort peu-près

$$g = g'\frac{a^2}{(a+z)^2} = g'\left(1-\frac{2z}{a}\right);$$

et si l'on fait $z' = z\left(1-\frac{z}{a}\right)$, d'où $dz' = dz\left(1-\frac{2z}{a}\right)$, le premier membre de l'équation (1) deviendra, en y substituant d'ailleurs pour g sa valeur précédente,

$$\int g\frac{dz}{l} = \frac{g'}{l}\cdot\int dz' = \frac{g'}{l}.z'.$$

De là, et prenant le logarithme tabulaire ou de Briggs,

$$z' = \frac{Kl}{g'M}\log\frac{p'}{p}, \qquad (2)$$

$M = 0,4342945$ étant le module.

On voit, par cette formule, que $\frac{Kl}{g'M}$ est un coefficient constant répondant à la température de la glace. On peut lui donner une forme dépendante du rapport entre les densités de l'air et du mercure, qui ont lieu à l'origine des z, où la pesanteur est g' et la densité de l'air $=D$. En effet, on a par ce qui précède,

$$p' = KDl.$$

D'un autre côté, si à ce point Δ exprime la densité du mercure au même degré de température et lorsque la hauteur du baromètre est $h^{(o)}$, l'équilibre entre la pression de l'air et le poids du mercure, rapporté à l'unité de surface, est

$$p' = g'\Delta h^{(o)};$$

ainsi $l = \frac{g'\Delta h^{(o)}}{KD}$, et la formule (2) devient, en y mettant d'ailleurs pour z' sa valeur $z\left(1-\frac{z}{a}\right)$,

$$z = \frac{h^{(o)}}{M}\cdot\frac{\Delta}{D}\log\frac{p'}{p}\left(1+\frac{z}{a}\right) = C\log\frac{p'}{p}\left(1+\frac{z}{a}\right). \qquad (a)$$

La colonne d'air comprise entre les deux baromètres vient d'être supposée à la température de la glace; mais quelle que soit la loi du décroissement de la chaleur dans l'atmosphère, il suffira, pour tenir compte du changement de température, de la considérer comme constante et égale à la température moyenne entre les deux extrêmes. Cela posé, puisque le volume d'une masse d'air déterminée s'accroît environ de $\frac{1}{250}$ par chaque degré du thermomètre centigrade (*), la valeur ci-dessus de z, pour convenir à la température moyenne $\frac{t+t'}{2}$, t et t' étant les températures de l'air aux stations supérieure et inférieure indiquées par les thermomètres *libres*, devra être multipliée par le facteur $1+\frac{1}{250}\cdot\frac{t+t'}{2}=1+\frac{2(t+t')}{1000}$. En effet z augmente dans le même rapport que la densité de l'air diminue, et suivant le n° précédent; $D=D''\left(1+\frac{1}{250}\frac{t+t'}{2}\right)$, D'' étant la densité de l'air à la température moyenne dont il s'agit; donc

$$z=C\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right)\log\frac{p'}{p}\cdot\left(1+\frac{z}{a}\right). \qquad (b)$$

A la même température et à la même force accélératrice de la pesanteur, les pressions p, p' sont proportionnelles aux hauteurs correspondantes h, h' des baromètres. On devrait donc écrire $\log\frac{h'}{h}$ à la place de $\log\frac{p'}{p}$; mais pour avoir égard à la condensation du mercure, qui a dû s'opérer dans la station la plus froide et où la colonne de ce fluide métallique a dû paraître un peu plus courte que si on l'avait observée dans une station inférieure sous la même pression, il faut augmenter cette colonne à raison de $\frac{1}{5412}$ par chaque degré contenu dans la différence entre les températures du mercure, observées aux deux stations extrêmes, à l'aide de thermomètres enchâssés dans la monture même des baromètres. Ainsi on aura $h+h\left(\frac{T'-T}{5412}\right)$ au lieu de h, T et T' exprimant les températures respectives du mercure des baromètres dans les stations supérieure et inférieure.

Ensuite, pour réduire les hauteurs observées du baromètre à la même pesanteur g' relative à la station inférieure, on fera attention que la pesanteur à la station la plus haute est $g=g'\frac{a^2}{(a+z)^2}=g'\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{z}{a}\right)^2}$; en nommant donc h' et H

(*) Cet accroissement est plus exactement de 0,00375, lorsque l'air est parfaitement sec; mais M. Laplace observe que l'on tient compte, en partie, de l'état hygrométrique de l'air, en le portant à 0,004.

les hauteurs observées des baromètres aux deux stations, et réduites à la même température, auquel cas $H=h+h\left(\frac{T'-T}{5412}\right)$, ces hauteurs réduites à la même pesanteur et étant proportionnelles à g, seront h' et $\frac{H}{\left(1+\frac{z}{a}\right)^2}$; on a ainsi

$$\log\frac{p'}{p}=\log\left(\frac{h'\left(1+\frac{z}{a}\right)^2}{H}\right)=\log\frac{h'}{H}+2\log\left(1+\frac{z}{a}\right);$$

mais $\log\left(1+\frac{z}{a}\right)=M\left\{\frac{z}{a}-\frac{z^2}{2a^2}+\ldots\right\}$, et puisque $\frac{z}{a}$ est une très-petite fraction, on a à fort peu-près pour son logarithme tabulaire

$$\log\left(1+\frac{z}{a}\right)=\frac{Mz}{a}=\frac{z}{a}.0,4342945;$$

par conséquent

$$\log\frac{p'}{p}=\log\frac{h'}{H}+\frac{z}{a}.0,8685889,$$

et la formule (*b*) devient

$$z=C\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right)\left\{\left(1+\frac{z}{a}\right)\log\frac{h'}{H}+\frac{z}{a}.0,8685889\right\}. \qquad (c)$$

Il reste à faire connaître le changement que le coefficient $C=\frac{h^{(0)}}{M}.\frac{\Delta}{D}$ doit éprouver sous une latitude autre que celle à laquelle on le suppose avoir été déterminé. Or la pesanteur diminuant à mesure que l'on s'approche de l'équateur, et cette diminution étant indiquée par le raccourcissement du pendule à secondes, il est clair que la correction actuelle dépend de l'effet de cette cause. De plus, comme les longueurs du pendule à secondes sont proportionnelles aux pesanteurs, on a

$$\frac{g'}{g''}=\frac{\lambda'}{\lambda''},$$

λ' et λ'' étant les longueurs que doit avoir ce pendule aux points de la terre où les pesanteurs sont respectivement g' et g'' : mais en général

$$\lambda'=0^m,739502+0^m,004208\sin^2\varphi, \qquad (\text{n° } 17.)$$

φ étant la latitude du lieu où est placé ce pendule. Si donc g'' est la pesanteur sous le parallèle de 50^{gr}, et g' celle qui a lieu sous la latitude φ, on aura, à cause de $\sin^2\varphi=\frac{1-\cos 2\varphi}{2}$, et de $\sin^2 50^{gr}=\frac{1}{2}$,

$$\frac{\lambda''}{\lambda'}=\frac{g''}{g'}=\frac{0,739502+0,002104}{0,739502+0,004208\sin^2\varphi}=\frac{1}{1-0,002837\cos 2\varphi};$$

et de là

$$g' = g''(1 - 0,002837\cos 2\psi) = g''(1 - \beta\cos 2\psi),$$

Cela posé, le coefficient $\frac{h^{(\circ)}}{M}\cdot\frac{\Delta}{D} = C$ étant évidemment réciproque à la densité de l'air ou à la pesanteur, et se rapportant à la latitude ψ, il est nécessaire, pour le ramener à ce qu'il serait sous le parallèle de 50^{gr} et en désignant alors sa valeur par C'', que

$$C'' = C(1 - \beta\cos 2\psi);$$

partant, la formule (c) devient

$$z = C''(1+\beta\cos 2\psi)\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right)\left\{\left(1+\frac{z}{a}\right)\log\frac{h'}{H}+\frac{z}{a}.0,868589\right\}. \qquad (d)$$

Il existe deux méthodes pour obtenir la valeur numérique du coefficient C''. La première consiste à niveler la hauteur comprise entre les deux stations, ou à la déterminer géométriquement par l'un des procédés que j'ai exposés, et à prendre pour inconnue dans l'équation (d) ce même coefficient. Cette méthode a été employée avec beaucoup de succès par M. Ramond, et il résulte d'un grand nombre d'observations barométriques de ce savant naturaliste, faites dans les temps les plus favorables et sur plusieurs montagnes des Pyrénées, dont la hauteur est bien connue, que

$$C'' = 18336^{mèt}.$$

La seconde méthode, qui est plus directe, consiste à déduire ce dernier coefficient du rapport même des densités du mercure et de l'air. Or, suivant un résultat d'expériences très-précises faites à Paris, par MM. Biot et Arago, le rapport $\frac{\Delta}{D} = 10463,0$, l'air parfaitement sec étant à zéro de température et la pression de l'atmosphère étant équivalente à $0^m,76$ (*Mém. de la classe des sciences math. et phys. de l'Institut*, premier semestre de 1806, page 385). Mais lorsque l'air est saturé d'eau, il faut, pour avoir égard à cette circonstance, augmenter ce rapport d'environ $\frac{1}{521}$ de sa valeur actuelle. On a donc, dans le cas d'humidité extrême, $\frac{\Delta}{D} = 10483,08$, et pour valeur moyenne répondant à-peu-près au terme où se font les observations barométriques,

$$\frac{\Delta}{D} = 10473,04;$$

on a d'ailleurs $h^{(\circ)} = 0^m,76$, $\psi = 54^{gr},26358$; ainsi la substitution de ces

nombres dans l'équation $C'' = C(1-\beta\cos 2\downarrow)$ donne

$$C'' = \frac{0^m,76\times 10473,04(1-0,002837\cos 2\downarrow)}{0,4342945} = 18334^m,1.$$

Les expériences immédiates qui conduisent à cette valeur, confirment donc le coefficient de M. Ramond, que l'on doit parconséquent regarder comme un résultat définitif.

Enfin l'on pourra supposer, sans erreur sensible, $a = 6366198^{mèt}$, et employer pour valeur de z dans le second membre de la formule (d), celle que l'on obtient en faisant $z=0$ dans ce même membre. D'après toutes ces considérations, l'on aura pour la différence de niveau des deux stations,

$$z = 18336^{mèt}(1+0,002837\cos 2\downarrow).\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right)\left\{\log\frac{h'}{H}+z\left(\frac{\log\frac{h'}{H}+0,8685897}{6366198}\right)\right\}.$$

C'est cette formule que M. Laplace a publiée dans le livre X de la Mécanique céleste. Quoique l'hypothèse que nous avons faite d'une température constante entre les deux stations ne soit pas rigoureusement exacte, l'on ne doit former aucun doute sur la précision dont il est possible d'approcher, lorsque les élémens variables de cette formule sont recueillis au milieu d'un air tranquille, et avec tous les soins qu'exige ce genre d'observations.

Dans le supplément à sa Mécanique céleste, M. Laplace donne une formule pour corriger de l'effet capillaire les hauteurs du baromètre. Il résulte de sa savante théorie, que cet effet est nul dans les baromètres à deux branches d'égale largeur, mais qu'il devient d'autant plus sensible dans les baromètres à large cuvette, que le tube de ces baromètres est plus étroit. Il y a plus, la hauteur barométrique, qui doit être comptée depuis le niveau inférieur jusqu'au sommet de la convexité terminale, est toujours moindre que la hauteur qui aurait lieu si le tube perdait sa propriété capillaire. Je m'étais proposé de donner ici cette formule de correction, dont le but est de rendre les divers baromètres comparables entre eux; mais les dépressions du mercure pouvant être déterminées d'une manière fort exacte, et beaucoup plus facilement par l'expérience, je vais, d'après le conseil même de M. Laplace, en rapporter une table, en faveur de ceux qui aiment à mettre une grande précision dans les observations barométriques; elle est due à Cavendish le père, et se trouve insérée dans les *Transactions philosophiques*. Les diamètres intérieurs des tubes y sont exprimés en décimales de pouce anglais, mais j'ai réduit tous les nombres en millimètres. Cette table suppose, comme je viens de le dire, que la hauteur du mercure a été prise du point le plus haut de la colonne; alors la dépression du mercure est ce qu'il faut ajouter à la hauteur ainsi observée, pour avoir la hauteur qui aurait lieu dans un tube fort large et où l'effet capillaire serait nul.

Diamètres intérieurs du tube		*Dépressions du mercure*	
en pouce anglais.	en millimètres.	en pouce anglais.	en millimètres.
0p, 6.....	15m.m, 2351	0p, 005.....	0m.m, 12696
0, 5.....	12, 6959	0, 007.....	0, 17774
0, 4.....	10, 1567	0, 015.....	0, 38088
0, 35.....	8, 8871	0, 025.....	0, 63479
0, 3.....	7, 6175	0, 036.....	0, 91410
0, 25.....	6, 3479	0, 050.....	1, 26959
0, 2.....	5, 0784	0, 067.....	1, 70125
0, 15.....	3, 8088	0, 092.....	2, 33605
0, 1.....	2, 5392	0, 140.....	3, 55485

Les réductions dont il s'agit sont calculées d'après cette valeur, savoir que le pouce anglais = 25millim.,3918; ainsi log. 25millim.,3918 = 1,4046942.

CHAPITRE III.

Détermination de la figure de la Terre, par les observations du pendule.

Théorie du pendule simple oscillant dans le vide.

13. Si on attache un corps, une sphère de métal, par exemple, à l'extrémité inférieure d'un fil ou d'une verge mobile autour d'un point fixe placé à l'autre extrémité, et qu'on l'écarte un peu de sa situation verticale, il fera, étant ensuite abandonné à l'action de la pesanteur, de petites oscillations qui seront à très-peu-près *isochrones* ou de la même durée, malgré la différence d'amplitude des arcs décrits. Les oscillations, c'est-à-dire les allées et les venues alternatives du pendule, se nomment aussi *vibrations*: elles se perpétueraient, sans la résistance que l'air oppose au mouvement du corps oscillant, et sans celle que le pendule éprouve au *point de suspension*. On nomme ainsi le point autour duquel le mouvement a lieu.

La durée des oscillations dépend de la grandeur et de la figure du corps suspendu, de la masse et de la longueur de la verge, ainsi que de la densité du milieu dans lequel se fait l'expérience. Il ne sera question, pour le moment, que du *pendule simple* oscillant dans le vide; c'est celui dont la masse de la verge est supposée nulle relativement à celle du corps considéré comme un point infiniment dense. J'enseignerai ensuite comment on détermine la longueur de ce pendule idéal, dont les oscillations se feraient dans le même temps que celles du *pendule composé*, et qui aurait par conséquent pour longueur la distance du point de suspension au centre d'oscillation, c'est-à-dire au lieu où l'on conçoit réunie toute la masse du corps en mouvement.

Les mesures géodésiques combinées avec les observations célestes, font connaître assez exactement l'ellipticité de la Terre; c'est aussi à quoi conduisent les mesures observées du pendule à secondes, dont on a reconnu que la longueur augmentait de l'équateur aux pôles, proportionnellement au quarré du sinus de la latitude. Je pense donc qu'on lira avec intérêt la théorie qui fait le sujet

de ce chapitre, et par laquelle j'ai cru devoir terminer tout ce qui a rapport à la haute Géodésie.

Richer remarqua le premier cet accroissement de la longueur du pendule, dans le voyage qu'il fit en Amérique, en 1672; il trouva que son horloge, réglée à Paris sur le temps moyen (art. 120, Géod.), retardait chaque jour, à Cayenne, d'une quantité sensible. Environ soixante ans après lui, Bouguer fit des expériences du même genre au Petit-Goave dans l'île Saint-Domingue, à Quito, sur le mont Pichincha et dans d'autres lieux de la terre, et il s'assura par ce moyen, que l'intensité de la pesanteur, l'un des phénomènes les plus singuliers du système du monde, décroît en outre dans le sens de la verticale en s'éloignant du niveau des mers.

Pour examiner de la manière la plus simple les circonstances du mouvement du pendule, dont les excursions sont censées faites dans un plan vertical, je partirai de ces principes connus, savoir :

1°. Que lorsqu'un corps descend, par la seule action de la pesanteur, le long d'une courbe, il a en chaque point la même vîtesse que s'il était tombé librement depuis le niveau du point de départ jusqu'à celui d'arrivée, quelle que soit la courbe décrite.

2°. Que l'équation du mouvement d'un point matériel assujéti à parcourir une courbe est $\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi$, ou $\frac{dv}{dt} = \varphi$, φ étant la force continue estimée dans le sens de la tangente à cette courbe, s l'arc décrit au bout du temps t, et $v = \frac{ds}{dt}$ la vîtesse acquise. (*Mécanique de* Francœur, n° 164.)

Cela posé, soit g la force accélératrice de la pesanteur qui anime le point matériel M suspendu à l'extrémité du fil CM supposé sans pesanteur et inextensible; C le point de suspension; $AP = x$ l'abscisse verticale, et $PM = y$ l'ordonnée du centre d'oscillation; $AC = a$ la longueur du pendule; $AD = b$ la flèche de l'arc BAB'; B le point de départ du mobile; s l'arc AM dans lequel il se meut; enfin v la vîtesse qu'il a acquise au point M après le temps écoulé t. Fig. 7.

La vîtesse v étant due à la hauteur DP, ou a, à cause de $DP = b - x$,

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(b-x)}.$$

Mais l'arc s décroissant à mesure que le temps t augmente, on doit écrire

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(b-x)}}.$$

Il faut exprimer ds en fonction de dx, afin de pouvoir intégrer cette équation; ce qui est facile, car le quarré de l'élément de l'arc s ayant pour

expression

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad \text{d'où} \qquad ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

et l'équation de la trajectoire AMB étant

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

on trouve de suite, par la différentiation, que

$$ds = \frac{adx}{y} = \frac{adx}{\sqrt{2ax - x^2}};$$

et de là

$$dt = \frac{-adx}{\sqrt{2g(bx - x^2)(2a - x)}}.$$

Multipliant et divisant respectivement par $2a$ les facteurs sous le radical, puis indiquant l'intégration, on a

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \int \left\{ \frac{-dx}{\sqrt{bx - x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{x}{2a}\right)}} \right\}.$$

Le développement du facteur $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{2a}}} = \left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$ par la formule du binome conduisant à une série convergente, l'expression de t se change en celle-ci :

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \int \frac{-dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2a} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^2}{4a^2} + \cdots\right],$$

et pour lors l'intégration est réduite à celle des termes de la forme $\frac{-x^m dx}{\sqrt{(bx - x^2)}}$: on l'effectuera au moyen de la formule

$$\int \frac{-x^m dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{(bx - x^2)} + \tfrac{1}{2}b \cdot \frac{2m-1}{m} \int \frac{-x^{m-1}dx}{\sqrt{(bx - x^2)}};$$

qui résulte de la théorie exposée à la page 173 de la deuxième édition du *Calcul intégral élém. de* Lacroix; mais comme on doit ici intégrer entre les limites $x = 0$, $x = b$, afin d'obtenir le temps de la demi-oscillation, son premier terme devient nul par l'une de ces suppositions. Si donc on fait successivement $m = 1$, $m = 2$, $m = 3 \ldots$, on aura

$$\int \frac{-xdx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{b}{2}\int \frac{-dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{b}{2} \cdot A$$

$$\int \frac{-x^2dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{3b}{4}\int \frac{-xdx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{3b^2}{2.4} \cdot A$$

$$\int \frac{-x^3dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{5b}{6}\int \frac{-x^2dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{3.5.b^3}{2.4.6} \cdot A,$$

ainsi de suite.

D'un autre côté, à cause de $\int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \int \frac{-2dx}{\sqrt{b^2-(2x-b)^2}} =$ arc $\left(\cos = \frac{2x-b}{b}\right)$, on obtient, en substituant ces valeurs,

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}\cdot\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{b^2}{2^2.a^2}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{b^3}{2^3.a^3}+\ldots\right\}\text{arc}\left(\cos=\frac{2x-b}{b}\right).$$

A la limite $x=b$ on a $t=0$; mais à celle $x=0$, il vient arc $\left(\cos=\frac{2x-b}{b}\right)=\pi$, ou 3π, 5π, $7\pi\ldots$; π étant la demi-circonférence pour le rayon $=1$. Donc en désignant par T la valeur de t résultant de l'intégrale définie, on a

$$T=\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}\cdot\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{b^2}{2^2.a^2}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{b^3}{2^3.a^3}+\ldots\right\}; \quad (1)$$

c'est le temps que le mobile met à descendre du point B de départ au point A le plus bas où la vîtesse, en vertu du premier principe énoncé précédemment, est $\sqrt{2gb}$. Arrivé à ce point, le mobile ne pouvant ni s'arrêter, ni rétrograder, puisqu'il n'y rencontre aucun obstacle, continuera à se mouvoir dans le même sens, et fera la demi-oscillation ascendante parfaitement égale à la première; ce qui est manifeste, car lorsque $v=0$ on a $x=b$. Après cela il descendra, par le seul effet de la pesanteur, pour faire une seconde oscillation, et ainsi de suite; ensorte que la durée de chaque oscillation sera $=2T$ (*).

Si l'on suppose que b soit très-petit, ou, ce qui est de même, que l'arc décrit ait très-peu d'amplitude, l'équation (1) se réduira à $T=\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, et l'oscillation entière sera

$$2T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}; \quad (2)$$

or comme ce résultat est indépendant de b, il s'ensuit que, *quelle que soit l'amplitude de l'arc BAB', pourvu cependant qu'elle soit très-petite, le temps de l'oscillation entière sera le même.*

Il résulte encore de cette hypothèse, que pour un autre pendule a' oscillant dans un autre lieu où la gravité est g', on a

$$2T'=\pi\sqrt{\frac{a'}{g'}}. \quad (3)$$

(*) La valeur de T donnée par l'équation (1) se déduit d'une formule plus générale obtenue par M. Laplace (*Mécanique céleste*, tome I, n° 11). Cet illustre géomètre y considère le cas des oscillations coniques (Voyez aussi à ce sujet la *Mécanique de* Francœur); mais dans les expériences du pendule on dispose l'appareil de manière que les oscillations soient circulaires.

Donc lorsque les temps des oscillations respectives de deux pendules sont *synchrones* ou égaux,

$$\sqrt{\frac{a}{g}}=\sqrt{\frac{a'}{g'}}, \quad \text{ou} \quad a : a' :: g : g';$$

c'est-à-dire que *les longueurs de deux pendules battant les secondes, par exemple, sont entre elles comme les forces accélératrices de la pesanteur.*

Si l'on supposait au contraire un pendule invariable, ou les longueurs des pendules égales, on aurait

$$\frac{2T}{2T'}=\frac{\sqrt{g'}}{\sqrt{g}};$$

ainsi *les temps seraient réciproques aux racines quarrées des forces accélératrices.*

Dans le même lieu on a $g=g'$, et alors les équations (2) et (3) donnent, pour deux pendules de différentes longueurs,

$$\frac{2T}{2T'}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a'}},$$

c'est-à-dire que *les durées des oscillations sont entre elles comme les racines quarrées des longueurs des pendules.*

De l'équation (1) l'on tire, en désignant $2T$ par τ, et en supposant b extrêmement petit,

$$g=\frac{\pi^2 a}{\tau^2},$$

telle est la valeur de la pesanteur g, qui, comme l'on sait, représente le double de l'espace qu'un corps, tombant dans le vide, parcourrait dans la première seconde de sa chute. Elle se détermine avec la plus grande exactitude, par les observations du pendule, comme nous le ferons voir par la suite. Nous remarquerons seulement pour le moment, que si un pendule simple d'une longueur a fesait N oscillations dans T secondes, on aurait d'abord $\tau=\frac{T}{N}$, et ensuite

$$g=\frac{\pi^2 a N^2}{T^2}; \quad \text{de même} \quad g'=\frac{\pi^2 a' N'^2}{T'^2},$$

π exprimant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $=1$. Lorsque $a=a'$, et $T=T'$, on a

$$\frac{g}{g'}=\frac{N^2}{N'^2};$$

donc *les quarrés des nombres d'oscillations faites en même temps par deux pendules de même longueur sont comme les forces accélératrices.*

On conçoit maintenant que les observations du pendule doivent faire connaître la figure de la terre, puisqu'il existe une relation entre la pesanteur et la longueur

du pendule qui bat les secondes. La *Mécanique céleste* contient, sur cette matière, des développemens importans que ne comporte pas cet Ouvrage; cependant nous donnerons au n° 17 une formule pour déterminer l'aplatissement du sphéroïde terrestre, d'après les résultats d'expériences fondées sur la théorie actuelle.

Mouvement du pendule dans un milieu résistant.

14. Puisqu'un corps plongé dans un fluide perd une partie de son poids égale au poids du volume de fluide qu'il déplace, il est clair que le pendule qui oscille dans l'air, fait moins de vibrations que s'il était mis en mouvement dans le vide, toutes choses égales d'ailleurs. Si donc un pendule battait successivement la seconde dans différens milieux, sa longueur augmenterait à mesure que la densité des milieux diminuerait, par la raison que cette diminution de densité produirait une augmentation dans la pesanteur du pendule. Un autre fait digne de remarque, c'est que, *quelle que soit la résistance du milieu, les oscillations du pendule se font toujours dans le même temps.* Cette résistance diminue seulement l'amplitude de l'oscillation et finit par l'anéantir. Bouguer est le premier qui ait publié ce théorème (*Figure de la Terre*, p. 341.); mais il n'a pas fait connaître les calculs qui ont pu servir d'appui à ses raisonnemens. Borda, au contraire, en a consigné une démonstration dans son Mémoire inédit sur le pendule. J'aurais plus de regrets de n'avoir pu consulter cet intéressant Mémoire, si M. Poisson ne m'eût pas fait l'amitié de me communiquer l'élégante démonstration à laquelle il est parvenu de son côté; la voici, à quelques développemens de calculs près.

Soit g_1 la gravité relative au milieu où se font les oscillations, et comme précédemment $AP = x$, $AM = s$, $AB = K$, $CM = CA = a$, et prenons pour unité la masse du pendule réunie à son centre d'oscillation; $g_1 \frac{dx}{ds}$ sera la gravité décomposée suivant la tangente à la courbe. Fig. 8.

Supposons la résistance du milieu proportionnelle au quarré de la vîtesse, comme on le fait le plus généralement, et représentons-la par $m\frac{ds^2}{dt^2}$, m étant un coefficient constant donné par l'expérience et qui dépend de la densité du milieu et de la figure du corps oscillant. L'équation du mouvement du centre d'oscillation sera, pendant la première demi-oscillation,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g_1\frac{dx}{ds} + m\frac{ds^2}{dt^2}; \qquad (1)$$

en observant que la composante $g_1\frac{dx}{ds}$ de la gravité tend à diminuer l'arc s tandis que la résistance du milieu tend à l'augmenter, puisqu'elle s'exerce toujours en

sens contraire du mouvement, qui se fait ici de M vers A. On a en outre

$$x = a\left(1 - \cos\frac{s}{a}\right),$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{ds} = \sin\frac{s}{a} = \frac{s}{a} - \frac{1}{2.3}\frac{s^3}{a^3} + \ldots.$$

En négligeant d'abord les puissances de s et de $\frac{ds}{dt}$ supérieures à la première, l'équation (1) devient

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g_1}{a}.s,$$

et intégrant par la méthode du n° 274 (*Calcul intégr. élém. de* Lacroix), on a

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{C - \frac{g_1}{a}s^2}, \quad \text{et} \quad t = \int \frac{-ds}{\sqrt{C - \frac{g_1}{a}s^2}} + C',$$

en mettant le signe — devant le radical, parce que t augmentant, s diminue. Les constantes arbitraires se déterminent par la condition qu'on ait en même temps $t = 0$, $s = K$, $\frac{ds}{dt} = 0$, K étant l'amplitude de la première demi-oscillation supposée très-petite, et $\frac{ds}{dt} = 0$ la vîtesse au point de départ. On trouvera d'abord

$$\frac{ds}{dt} = 0 = \sqrt{C - \frac{g_1}{a}K^2}, \quad \text{d'où} \quad C = \frac{g_1}{a}K^2,$$

et par conséquent

$$t = \int \frac{-ds}{\sqrt{\left(\frac{g_1}{a}\right).\sqrt{K^2 - s^2}}} + C',$$

D'ailleurs, à cause de

$$\int \frac{-ds}{\sqrt{K^2 - s^2}} = \int \frac{-\frac{ds}{K}}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{K^2}}} = \text{arc}\left(\cos = \frac{s}{K}\right),$$

il vient

$$t = \frac{1}{\sqrt{\frac{g_1}{a}}}.\text{arc}\left(\cos = \frac{s}{K}\right) + C'.$$

On détermine ensuite la constante C' en faisant dans cette dernière équation

$=0$, $s=K$, et alors on a $C'=0$; donc

$$t=\frac{1}{\sqrt{\frac{g_1}{a}}}\left\{\text{arc}\left(\cos=\frac{s}{K}\right)\right\};$$

donc enfin

$$s=K\cos.t\sqrt{\frac{g_1}{a}}.$$

Pour avoir une valeur plus exacte de s, soit

$$s=K\cos.t\sqrt{\frac{g_1}{a}}+s';$$

en substituant cette valeur dans l'équation (1), puis négligeant les puissances de K supérieures à la seconde, ainsi que les produits Ks', $K\frac{ds'}{dt}$, on aura, pour déterminer la correction s', l'équation

$$\frac{d^2s'}{dt^2}=-\frac{g_1}{a}s'+K^2\frac{g_1}{a}.m\left(\sin.t\sqrt{\frac{g_1}{a}}\right)^2$$

$$=-\frac{g_1}{a}s'+K^2\frac{g_1}{a}.m\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos.2t\sqrt{\frac{g_1}{a}}\right).$$

Cette équation, qu'il s'agit d'intégrer, ayant la forme de celle-ci

$$\frac{d^2y}{dx^2}+A^2y=R,$$

de laquelle on tire

$$y=p\cos.Ax+q\sin.Ax$$

$$+\frac{\sin.Ax\int Rdx\cos.Ax-\cos.Ax\int Rdx\sin.Ax}{A}$$

(*Calcul integr. élém. de* Lacroix, n° 282), on trouvera avec un peu d'attention et en faisant

$$x=t;\ y=s';\ A=\sqrt{\frac{g_1}{a}};\ R=K^2\frac{g_1}{a}.m\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos.2t\sqrt{\frac{g_1}{a}}\right);\ u=t\sqrt{\frac{g_1}{a}};$$

que l'intégrale cherchée est

$$s'=p\cos u+q\sin u+\frac{R^2m}{2}(1+\tfrac{1}{3}\cos.2u).$$

Les constantes p et q se déterminent de manière qu'on ait à-la-fois $t=0$,

$s'=0$, $\frac{ds'}{dt}=0$; or dans ce cas on a $u=0$, et l'équation précédente donne

$$p=-\frac{R^2m}{2}\cdot\frac{4}{3};$$

ensuite, si on la différentie par rapport à s' et u, pour obtenir le rapport $\frac{ds'}{du}$, ou $\frac{ds'}{dt}=0$, on trouvera, après avoir fait $u=0$, que la constante q est nulle. On a donc

$$s'=\frac{K^2m}{2}\left(1-\tfrac{4}{3}\cos.t\sqrt{\frac{g_1}{a}}+\tfrac{1}{3}\cos.2t\sqrt{\frac{g_1}{a}}\right);$$

et enfin

$$s=K\cos.t\sqrt{\frac{g_1}{a}}+\frac{K^2m}{2}\left(1-\tfrac{4}{3}\cos.t\sqrt{\frac{g_1}{a}}+\tfrac{1}{3}\cos.2t\sqrt{\frac{g_1}{a}}\right).$$

Ainsi, en supposant K assez petit pour qu'on en puisse négliger la troisième puissance, cette formule représentera la valeur de s pendant toute la durée de la première demi-oscillation.

Si l'on désigne par T le temps de cette demi-oscillation, on aura, pour le déterminer, l'équation $s=0$, ou

$$\cos.T\sqrt{\frac{g_1}{a}}+\frac{Km}{2}\left(1-\tfrac{4}{3}\cos.T\sqrt{\frac{g_1}{a}}+\tfrac{1}{3}\cos.2T\sqrt{\frac{g_1}{a}}\right)=0,$$

en négligeant le terme multiplié par K, on tirerait de cette équation, $T\sqrt{\frac{g_1}{a}}=\frac{\pi}{2}$, π étant la demi-circonférence pour le rayon $=1$; faisant donc $T\sqrt{\frac{g_1}{a}}=\frac{\pi}{2}+t'$ et négligeant les puissances de t' supérieures à la 1ere, on aura

$$\cos.T\sqrt{\frac{g_1}{a}}=\cos\frac{\pi}{2}-t'\sin\frac{\pi}{2}=-t'$$

$$\cos.2T\sqrt{\frac{g_1}{a}}=\cos\pi-t'\sin\pi=-1;$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et négligeant le produit $t'K$, on obtiendra $t'=\frac{Km}{3}$; partant

$$T\sqrt{\frac{g_1}{a}}=\frac{\pi}{2}+\frac{Km}{3},\quad\text{ou}\quad T=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{Km}{3}\right)\sqrt{\frac{a}{g_1}};$$

ainsi le temps de la première demi-oscillation est augmenté par l'effet de la résistance du milieu.

Pour avoir la vîtesse au point le plus bas, différentions la valeur trouvée pour s, et substituons dans $\frac{ds}{dt}$ la valeur de T, nous aurons, en appelant V cette vîtesse et en rejetant les puissances de K supérieures à la seconde, $V = -K\left(1 - \frac{2mK}{3}\right)\sqrt{\frac{g_1}{a}}$; ou bien en faisant abstraction du signe qui indique seulement le sens du mouvement,

$$V = K\left(1 - \frac{2mK}{3}\right)\sqrt{\frac{g_1}{a}};$$

il suit de là que la vîtesse acquise au point le plus bas est diminuée par la résistance du milieu.

Déterminons maintenant le temps de la seconde demi-oscillation. A est alors le point de départ où la vîtesse est égale à celle acquise pendant la première demi-oscillation.

Faisant ici $AP' = x$, $AM' = s$, $CM' = CA = a$, l'équation du mouvement pendant la seconde demi-oscillation sera

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g_1\frac{dx}{ds} - m\frac{ds^2}{dt^2};$$

parce que, dans cette circonstance, la composante $g_1\frac{dx}{ds}$ de la pesanteur et la résistance du milieu sont deux forces tendantes à diminuer l'arc s, compté du point A le plus bas, qui est maintenant le point de départ. En faisant deux approximations successives, comme dans le calcul précédent, on a d'abord

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g_1}{a}s,$$

et en intégrant,

$$-s = K\left(1 - \frac{2mK}{3}\right).\sin.t\sqrt{\frac{g_1}{a}};$$

les deux constantes arbitraires étant déterminées par la condition qu'au point de départ A on ait $t = 0$, $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = V = K\left(1 - \frac{2mK}{3}\right)\sqrt{\frac{g_1}{a}}$. Ensuite posant $s = K\left(1 - \frac{2mK}{3}\right)\sin.t\sqrt{\frac{g_1}{a}} + s'$, on trouve

$$s' = -\frac{mK^2}{2}\left(1 - \tfrac{2}{3}\cos.t\sqrt{\tfrac{g_1}{a}} - \tfrac{1}{3}\cos.2t\sqrt{\tfrac{g_1}{a}}\right);$$

donc en ne conservant que les premières et secondes puissances de K

$$s = K\left(1 - \frac{2mK}{3}\right)\sin.t\sqrt{\frac{g_1}{a}} - \frac{mK^2}{2}\left(1 - \tfrac{2}{3}\cos.t\sqrt{\tfrac{g_1}{a}} - \tfrac{1}{3}\cos.2t\sqrt{\tfrac{g_1}{a}}\right).$$

Telle est la formule qui représente par approximation la valeur de s pendant la durée de la seconde demi-oscillation.

Le mobile s'élevant jusqu'à ce qu'on ait $\frac{ds}{dt} = 0$, si l'on désigne par T'' le temps de la seconde demi-oscillation, on aura, pour le déterminer, l'équation $\frac{ds}{dt} = 0$, ou

$$\left(1 - \frac{2mK}{3}\right)\cos . T'' \sqrt{\frac{g_1}{a}} - \frac{mK}{3}\left(\sin . T'' \sqrt{\frac{g_1}{a}} + \sin . 2T'' \sqrt{\frac{g_1}{a}}\right) = 0.$$

Faisant $T'' \sqrt{\frac{g_1}{a}} = \frac{\pi}{2} + t'$, et omettant les puissances de t' supérieures à la première, ainsi que le produit $t'K$, il vient $t' = -\frac{mK}{3}$, et de là

$$T'' \sqrt{\frac{g_1}{a}} = \frac{\pi}{2} - \frac{mK}{3}, \quad \text{ou} \quad T'' = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{mK}{3}\right)\sqrt{\frac{a}{g_1}}.$$

Donc le temps de la demi-oscillation ascendante est diminué par l'effet de la résistance du milieu, de la même quantité que celui de l'oscillation descendante est augmenté. D'où il résulte ce théorème, que *le temps de l'oscillation entière est le même que si le mouvement avait lieu dans le vide.*

Pour déterminer l'amplitude K' de la seconde demi-oscillation, il faudra faire $t = T''$ dans la valeur de s relative à cette demi-oscillation, alors en ne conservant que les deux premières puissances de K, on trouvera

$$K' = K - \frac{4mK^2}{3}.$$

De même, si K'', K''', etc. représentent les amplitudes de la troisième, quatrième, etc. demi-oscillation, on aura

$$K'' = K' - \frac{4mK'^2}{3}, \quad K''' = K'' - \frac{4mK''^2}{3}, \quad \text{etc.},$$

ce qui fait voir que ces amplitudes diminuent successivement et avec d'autant plus de rapidité que le coefficient m de la résistance est plus grand.

M. Poisson considère en outre le cas où la fonction qui exprime la résistance renfermerait un terme proportionnel à la simple vîtesse et représenté par $n\frac{ds}{dt}$. « Il est, dit ce géomètre, facile de s'assurer que le temps de l'oscilla-
» tion entière resterait encore le même que dans le vide, pourvu toutefois que la
» résistance du milieu fût une force très-petite par rapport au poids de la len-
» tille, et que l'on négligeât, dans le calcul, le quarré de n et le produit de
» n et de m. En effet l'équation du mouvement serait alors

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g_1\frac{dx}{ds} - n\frac{ds}{dt} \pm m\frac{ds^2}{dt^2};$$

» en prenant le signe + pour la première demi-oscillation, et le signe — pour » la seconde, et en observant que le terme $-n\frac{ds}{dt}$ change de signe de lui-» même, à cause du facteur $\frac{ds}{dt}$, en passant d'une demi-oscillation à l'autre. » Or si l'on fait $s = s_1 e^{-\frac{nt}{2}}$, que l'on mette à la place de $\frac{dx}{ds}$ sa valeur appro-» chée $\frac{s}{a}$, et qu'après les substitutions faites on supprime les termes multipliés » par n^2 ou par mn, l'équation précédente deviendra

$$e^{-\frac{nt}{2}}\frac{d^2 s_1}{dt^2} = -\frac{g_1}{a}s_1 e^{-\frac{nt}{2}} \pm m e^{-nt}\frac{ds_1^2}{dt^2}.$$

» Divisant tous les termes par $e^{-\frac{nt}{2}}$, et remplaçant le facteur $me^{-\frac{nt}{2}}$ par m, ce » qui est permis, puisque le temps t ne saurait devenir très-grand pendant la » durée d'une seule demi-oscillation, on aura

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} = -\frac{g_1}{a}s_1 \pm m\frac{ds_1^2}{dt^2};$$

» équation d'où l'on tirera sans peine les mêmes conséquences que ci-dessus, re-» lativement à la durée de chacune des deux demi-oscillations. »

» Quelle que soit la loi de la résistance, la supposition que cette résistance » est une force très-petite relativement au poids de la lentille, est conforme à » ce qui a lieu dans la pratique où la densité du milieu est très-petite et où » l'on a soin de prendre, pour former la lentille, une matière très-dense; mais » on doit observer que cette supposition n'est plus nécessaire, quand la résis-» tance est proportionnelle au quarré de la vîtesse; ensorte qu'alors cette résis-» tance peut être une force comparable au poids de la lentille. Il suffit dans » ce cas que l'amplitude de l'oscillation soit très-petite, pour que le temps de » cette oscillation ne soit point altéré par la résistance; car dans le calcul que » nous venons de faire, l'approximation n'a point eu lieu par rapport au coeffi-» cient m, mais bien par rapport aux puissances de K. »

Comme il importe, dans la pratique, de connaître la valeur de g_1, soit M la masse du corps oscillant, g sa pesanteur dans le vide, p_1 son poids dans le milieu où se fait l'expérience, p son poids dans le vide, on aura

$$p = gM, \qquad p_1 = g_1 M; \qquad \text{donc} \qquad g_1 = \frac{p_1 g}{p};$$

c'est cette dernière valeur qu'il faudrait substituer dans toutes les formules précédentes.

Mouvement du pendule dans la supposition d'un fil extensible.

15. Jusqu'à présent le fil qui supporte la masse oscillante a été supposé inextensible, et en effet cette hypothèse peut être admise dans la pratique, sans erreur appréciable, surtout lorsque le pendule n'est mis en mouvement que quelque temps après avoir été suspendu. Cependant, comme dans les expériences délicates, on ne doit négliger aucune des circonstances physiques qui sont de nature à influer sur les résultats ou les conséquences qu'on en veut déduire, le jeune savant auquel appartient l'analyse du n° précédent a cherché en outre la correction due à l'élasticité du fil.

Je vais rapporter textuellement les calculs qu'il a encore eu la complaisance de me communiquer à ce sujet : ils font maintenant partie d'un Mémoire que son auteur a lu, au mois de mars de cette année, dans une des séances de la Société Philomathique.

Fig. 8. « Soient, à un instant quelconque, θ l'angle MCA formé par le fil et la » verticale, r la longueur variable du pendule, c'est-à-dire la distance du centre » d'oscillation au point de suspension; t le temps écoulé depuis l'origine du » mouvement; g la gravité.

» L'élasticité du fil est une force qu'on peut regarder comme appliquée au » centre d'oscillation, qui est dirigée suivant la longueur du fil, et qui ne » peut être fonction que de cette longueur; je la désignerai par φr, et l'on » aura pour l'une des équations du mouvement du centre d'oscillation, en pre- » nant pour unité la masse du pendule réunie à ce centre,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = g\cos\theta - \varphi r.$$

» Il faut, dans le cas qui nous occupe, une seconde équation, puisqu'on a » deux variables r et θ à déterminer en fonction de t; je prendrai pour cette » seconde équation celle que fournit le principe des aires, savoir,

$$\frac{d.r^2d\theta}{dt^2} = -gr\sin\theta, \quad (*)$$

(*) M. Poisson n'indiquant pas précisément la route qu'il a suivie pour arriver à cette équation, je vais la tracer en faveur de quelques lecteurs. On a en général par le principe des aires (*Mécan. de* Francœur, n° 183)

$$d.(xdy - ydx) = (xY - yX)dt^2. \qquad (m)$$

Mais dans le cas de la pesanteur, $Y = 0$, $X = g$. De plus r étant le rayon vecteur et θ l'angle qu'il fait avec CA (fig. 8) pris pour axe des abscisses, on a, en comptant les x du point de

» dans laquelle n'entre pas la force φr, parce que cette force est constamment » dirigée vers l'origine des rayons vecteurs.

» La forme de la fonction φr est inconnue ; mais comme r varie peu pendant tout le mouvement, si on appelle a sa valeur à l'origine, et qu'on fasse généralement $r = a - u$, u sera une très-petite quantité dont nous négligerons les puissances supérieures à la première ; alors nous aurons

$$\varphi r = A + Bu,$$

» A et B étant des constantes données par l'expérience. Pour les déterminer, soit b la longueur du fil avant qu'il ait subi aucune extension ; supposons qu'après l'avoir ainsi mesuré on le suspende verticalement en attachant la lentille à son extrémité inférieure, et soit α (*) l'extension que le fil prend en vertu du poids de ce corps, de sorte qu'on ait $b + \alpha = a$. Il faudra donc que la force φr soit nulle pour $z = b$, et qu'elle soit égale à la gravité g, pour $r = a$; ainsi l'on aura $\varphi b = \varphi(a - \alpha) = A - B\alpha = 0$, et $\varphi a = A = g$; d'où l'on tire $A = g$, $B = \frac{g}{\alpha}$, et généralement

$$\varphi r = g - \frac{g}{\alpha} u.$$

» Cela posé, les équations du mouvement deviennent, en négligeant les puissances de u supérieures à la première,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -g\cos\theta + g - \frac{g}{\alpha}u, \qquad (1)$$

$$(a^2 - 2au)\frac{d^2\theta}{dt^2} - 2a\frac{du}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -ga\sin\theta + gu\sin\theta. \qquad (2)$$

» Pour les intégrer par approximation, négligeons d'abord dans l'équation (2)

---

suspension C,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

par suite

$$dx = -r\sin\theta.d\theta + dr\cos\theta, \quad dy = r\cos\theta.d\theta + dr\sin\theta;$$

puis

$$xdy = r^2\cos^2\theta.d\theta + rdr\sin\theta\cos\theta, \quad ydx = -r^2\sin^2\theta.d\theta + rdr\sin\theta\cos\theta.$$

Donc

$$xdy - ydx = r^2d\theta.$$

Donc enfin l'équation (m) prend, à l'aide de ces valeurs, la forme de celle que j'avais en vue de trouver. Il faut bien faire attention que dans tout ce numéro, g a la même signification que g_1 dans le numéro précédent.

(*) L'extension α est beaucoup trop petite pour pouvoir être observée directement sur la longueur du fil même ; on la conclut de l'extension mesurée sur un fil beaucoup plus long et de même matière que celui qu'on emploie.

» les termes de seconde dimension, par rapport à θ et à u, ce qui la réduit à

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{a}\theta,$$

» dont l'intégrale est

$$\theta = h \sin.t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

» en supposant que le pendule soit parti de la position verticale et en désignant » par $h\sqrt{\frac{g}{a}}$ la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ à l'origine. Substituons cette valeur de θ dans » l'équation (1), et ne conservons que le quarré de h, nous aurons

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{g}{a}u + g\frac{h^2}{2}\left(\sin.t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)^2,$$

» dont l'intégrale complète est

$$u = C\cos.t\sqrt{\frac{g}{\alpha}} + C'\sin.t\sqrt{\frac{g}{\alpha}} + \frac{h^2\alpha}{4}\left(1 - \frac{1}{1-\frac{4\alpha}{a}}.\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right); \quad (3)$$

» C, C' étant les constantes arbitraires. Nous les déterminerons par la con- » dition qu'on ait à l'origine $u = 0$, $\frac{du}{dt} = 0$, et comme la fraction $\frac{4\alpha}{a}$ doit être » négligée, parce que les termes renfermés dans les parenthèses sont déjà mul- » tipliés par α, nous aurons

$$u = \frac{h^2\alpha}{4}\left(1 - \cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right).$$

« Maintenant si l'on fait $\theta = h \sin.t\sqrt{\frac{g}{a}} + 6'$, que l'on substitue cette valeur » et celle de u dans l'équation (2), que l'on néglige les puissances de h supé- » rieures à la troisième, que l'on néglige de même celles de $6'$ supérieures à la » première, et enfin les produits $h^2\theta'$, $h^2\frac{d\theta'}{dt}$; on aura, pour déterminer la cor- » rection $6'$, l'équation

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} = -\frac{g}{a}6' + \frac{gh^3}{6a}\left(\sin.t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)^3 + \frac{gh^3\alpha}{a^2}\left\{\sin.2t\sqrt{\frac{g}{a}}.\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}} - \frac{1}{4}\left(1 - \cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right).\sin.t\sqrt{\frac{g}{a}}\right\};$$

» ou bien en développant les puissances et les produits de sinus et de cosinus » que cette équation renferme, afin de faciliter l'intégration,

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} = -\frac{g}{a}\theta' + \frac{gh^3}{8a}\left[\left(1+\frac{\alpha}{a}\right)\sin.t\sqrt{\frac{g}{a}} - \left(\frac{1}{3} - \frac{5\alpha}{a}\right)\sin.3t\sqrt{\frac{g}{a}}\right];$$

» en intégrant et en déterminant les constantes arbitraires, de manière qu'on » ait à-la-fois $t=0$, $\theta'=0$, $\frac{d\theta'}{dt}=0$, on aura la valeur de θ', et par suite » celle de θ, savoir,

$$\theta = h\sin.t\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{h^3}{16}\left[\left(1+\frac{\alpha}{a}\right)\left(\sin.t\sqrt{\frac{g}{a}} - t\sqrt{\frac{g}{a}}.\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{3}-\frac{5\alpha}{a}\right)\left(\sin.3t\sqrt{\frac{g}{a}} - 3\sin.t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)\right].$$

» Si l'on demande l'instant où le pendule sera revenu à la position verticale, » il faudra égaler à zéro cette valeur de θ pour le déterminer. Or en négligeant » le terme multiplié par h^3, l'équation $\theta=0$ donnerait $t\sqrt{\frac{g}{a}}=\pi$, en ap- » pelant π la demi-circonférence pour le rayon 1; faisant donc $t\sqrt{\frac{g}{a}}=\pi+t'$, » substituant dans l'équation $\theta=0$, et négligeant les puissances de t' supérieures » à la première, ainsi que le produit h^2t', il vient

$$-t' + \frac{h^2}{16}\left(1+\frac{\alpha}{a}\right).\pi\sqrt{\frac{g}{a}} = 0;$$

» d'où il suit

$$t\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi\left(1+\frac{h^2}{16}\left(1+\frac{\alpha}{a}\right).\sqrt{\frac{g}{a}}\right). \qquad (4)$$

» En substituant cette valeur de $t\sqrt{\frac{g}{a}}$ dans celles de u, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, il est » facile de vérifier que ces valeurs deviennent

$$u=0, \quad \frac{du}{dt}=0, \quad \frac{d\theta}{dt}=-h\sqrt{\frac{g}{a}},$$

» *en négligeant toutefois les puissances de h supérieures à la troisième*, à laquelle » nous avons borné notre approximation. Le pendule revenu à la position ver- » ticale, se trouvera donc dans les mêmes circonstances que quand il en est parti, » au signe près de la vîtesse $\frac{d\theta}{dt}$; d'où l'on peut conclure qu'il fera de part et » d'autre de la verticale une suite infinie d'oscillations égales et d'égale durée. » Le temps de ces oscillations sera donné par l'équation (4), et cette équation » servira aussi à déterminer la longueur du pendule qui fait ses oscillations dans » l'unité de temps. On en tire, en y faisant $t=1$ et en négligeant la qua- » trième puissance de h,

$$a = \frac{g}{\pi^2}\left(1-\frac{h^2\pi}{8}\left(1+\frac{\alpha\pi^2}{g}\right)\right).$$

» Cette analyse fait voir que les petites oscillations d'un pendule extensible » suivent la même loi que celles d'un pendule non extensible ; seulement l'ex- » tensibilité du fil donne lieu à une légère correction dans la durée de l'oscil- » lation et dans la longueur du pendule, qui fait ses oscillations dans l'unité » de temps, et cette correction se confond avec celle qui est due à la grandeur » de l'amplitude, dont elle ne fait qu'augmenter le coefficient. Cependant il » est bon d'observer que ce résultat suppose, comme nous l'avons fait plus » haut, que le pendule part de la position verticale après que le fil a pris toute » son extension, et qu'on le dérange de cette position en lui communiquant » une vîtesse horizontale ; de manière qu'à l'origine du mouvement le raccour- » cissement u et la vîtesse $\frac{du}{dt}$ sont regardés comme nuls. Sans cela les termes » $C\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}$, $C'\sin.t\sqrt{\frac{g}{a}}$ resteraient dans l'équation (3), et les oscillations » du pendule extensible dépendraient des deux angles $t\sqrt{\frac{g}{a}}$ et $t\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$; en- » sorte qu'elles suivraient une loi très-compliquée et différente de celles que » suivent les oscillations du pendule ordinaire. »

Quoique l'extensibilité du fil ait une influence presque nulle sur la durée des oscillations, quand on emploie pour former la longueur du pendule une matière très-peu extensible, comme le platine, par exemple, c'est toujours un problème curieux de trouver quel peut être le degré de cette influence ; « et l'on conçoit, » dit M. Poisson, que si l'on en demandait une solution rigoureuse, on aurait » à résoudre le problème très-connu du mouvement d'un point attiré vers deux » centres fixes, qui seraient ici le point de suspension et le centre d'action de la » pesanteur. »

Précis des expériences et des réductions à faire pour déterminer la longueur du pendule à secondes.

16. Après avoir exposé la théorie du pendule, il nous reste à expliquer la manière de déterminer par expérience la longueur de cet instrument, lorsqu'on veut l'assujétir à battre les secondes.

Le pendule d'expérience dont Bouguer fit usage en Amérique, était un petit poids de cuivre formé de deux cônes tronqués opposés base à base et suspendu à l'extrémité inférieure d'un fil de pitte très-mince, d'un mètre environ de longueur (*) ; ce fil était saisi par une pince à son extrémité supérieure, mais de

(*) La pitte, ou espèce d'aloës, est une plante très-commune en Amérique, et dont les fibres ont beaucoup de force et de flexibilité. Bouguer s'est assuré, en formant des hygromètres avec ces fibres, qu'elles se ressentent très-peu de l'humidité de l'air, et par conséquent qu'elles conservent assez exactement leur longueur.

manière cependant qu'il y conservait toute sa souplesse. Maupertuis et les autres académiciens français qui mesurèrent les premiers un arc du méridien au cercle polaire, firent aussi de semblables expériences à Pello; mais ils se servirent de petits globes de différens métaux, traversés chacun par une verge de cuivre, qu'ils adaptaient ensuite à leur horloge. Dans ces derniers temps, les expériences du pendule ont été répétées à Paris, avec une précision extrême et par des procédés en partie nouveaux. Borda, l'un des membres de la Commission des poids et mesures, conçut l'idée de faire osciller une boule de platine à l'extrémité d'un fil de quatre mètres de longueur, attaché à une suspension à couteaux qui posait sur des plans de diamant. Quel que soit l'appareil que l'on emploie à cet effet, la longueur du pendule est, comme nous l'avons dit, la distance du point de suspension au centre d'oscillation, centre qu'il ne faut pas confondre avec le centre de gravité du système. (*Cours de Mécan.* de Prony, n° 34, ou *Mécan.* de Francœur, n° 249.)

Je supposerai ici une sphère oscillante suspendue à un fil très-mince et très-peu extensible. Cela posé, en nommant r', r'', ε', ε'' les distances de l'axe de rotation aux centres de gravité et d'oscillation du fil et de la sphère, dont les masses respectives sont M', M''; on aura, en désignant en outre par ε la longueur du pendule ou la distance du point de suspension au centre d'oscillation du système,

$$\varepsilon = \frac{M'r'\varepsilon' + M''r''\varepsilon''}{M'r' + M''r''}, \quad (\textit{Mécan.} \text{ de Francœur, n° 252.})$$

ou bien, si on multiplie les deux termes de cette fraction par la pesanteur g, (n° 14), et que l'on nomme P', P'' les poids respectifs du fil et de la sphère

$$\varepsilon = \frac{P'r'\varepsilon' + P''r''\varepsilon''}{P'r' + P''r''};$$

or par la théorie du centre d'oscillation, développée au n° 251 de la Mécanique citée, on a

$$\varepsilon' = \tfrac{2}{3}.2r',$$

$$\varepsilon'' = r'' + \tfrac{2}{5}.\frac{\beta^2}{r''},$$

β étant le rayon de la sphère, $2r'$ la longueur du fil après qu'il a éprouvé toute sa dilatation, et r'' la distance du centre de la sphère au point de suspension. Lorsque l'on prend ces mesures, on observe la température, afin de pouvoir les réduire exactement en mètres. Si, par exemple, on les comparait à l'étalon de platine, qui ne représente la longueur réelle du mètre qu'au terme de la glace fondante, et que pendant l'expérience du pendule la température au-dessus de zéro fût de 15^d centigrades, la longueur de l'étalon ou *module* serait plus longue que le mètre, de 15 fois 0,00000 8565, parce que la dilatation du platine est de 0,00000 8565 pour une variation de 1^d du thermomètre

centigrade (art. 64, Géod.). Chaque longueur observée du module serait donc $= 1^{mèt} + 15 \times 0,00000\,8565$, et l'on aurait en général,

$$\Sigma = \varepsilon (1 + x\,\delta),$$

en nommant x les degrés du thermomètre, δ la dilatation du métal dont l'étalon est composé, ε la longueur du pendule estimée en modules, et Σ sa longueur en mètres.

Supposons présentement que l'on ait réglé une horloge à secondes sur le temps moyen (art. 122, Géod.), et que le pendule d'expérience, dont la longueur, eu égard à la température, est Σ, oscille de manière à parcourir d'abord un arc de 5 centimètres environ, et fasse N vibrations dans T secondes; alors la durée d'une de ces vibrations sera $\frac{T}{N}$, et pour déterminer la force accélératrice g qui a lieu dans le vide, il faudra, dans la formule $T + T' = \pi\sqrt{\frac{a}{g_1}}$ obtenue n° 14, mettre à la place de a, $T + T'$ et g_1 leurs valeurs respectives Σ, $\frac{T}{N}$ et $\frac{p_1 g}{p}$; on aura par ce moyen

$$\frac{T}{N} = \pi\sqrt{\frac{\Sigma p}{p_1 g}}, \qquad \text{d'où} \qquad g = \frac{\pi^2 \Sigma p \,.\, N^2}{v_1 T^2},$$

p_1 et p désignant ici le poids du pendule dans l'air et dans le vide; l'équation (1) n° 13, donne le même résultat en y écrivant g_1 au lieu de g et ne conservant que le premier terme du second membre; mais il convient de pousser au moins l'exactitude jusqu'au deuxième terme, et d'évaluer pour cet effet le sinus verse b de l'arc décrit.

Le rapport de p à p_1 dépendant de la densité actuelle de l'air, il est important, pour la déterminer, d'observer la hauteur du baromètre en même temps que celle du thermomètre. Si, par exemple, v exprime, à la température de x degrés centésimaux, le volume d'air déplacé par le pendule, et que Δ soit la pesanteur spécifique de l'air, au terme de la glace fondante et à $0^m,76$ de hauteur du baromètre, on aura (n° 11) pour la pesanteur spécifique Δ_1 à la température x et sous la pression h de l'atmosphère,

$$\Delta_1 = \frac{\Delta \,.\, h}{0^m,76(1 + 0,00375x)\left(1 + \frac{x}{5412}\right)},$$

et par suite le poids de l'air déplacé, ou $\Pi = \Delta_1 v$. Donc, le poids du pendule dans le vide est

$$p = p_1 + \Pi.$$

Les expériences de Borda, faites à l'Observatoire de Paris, ont donné pour

résultat

$$g = 9^{m\acute{e}t}, 80879\ 5248, \qquad \log g = 0, 99161\ 56690,$$

en prenant pour unité de temps la seconde sexagésimale ou la 86400e partie du jour moyen. Dans la nouvelle division du temps, où la seconde est la 100000e partie du jour moyen, on a

$$g = 7^{m}, 32214, \qquad \log g = 0, 8646381.$$

Pour connaître ensuite la longueur a_1 du pendule simple battant les secondes dans le lieu même de l'expérience, mais dans le vide, on emploiera la formule

$$1'' = \pi \sqrt{\frac{a_1}{g}};$$

ainsi à Paris l'on a, par rapport à l'ancienne division du temps,

$$a_1 = 0^{m\acute{e}t}, 99383\ 87446, \qquad \log a_1 = 9, 99731\ 59236,$$

et par rapport à la nouvelle,

$$a_1 = 0^{m\acute{e}t}, 741887, \qquad \log a_1 = 9, 8703\ 378.$$

Afin de pouvoir comparer entre elles les longueurs du pendule à secondes, soit pour en déduire la loi de leurs variations, soit pour en conclure l'aplatissement de la Terre, il importe de ramener ces longueurs au niveau des mers; c'est ce qui se pratique de la manière suivante.

Soit z la hauteur du lieu de l'expérience au-dessus du niveau de la mer, la pesanteur au pié de la verticale z sera, n° 12, égale à $g\frac{(r+z)^2}{r^2} = g\left(1 + \frac{2z}{r}\right)$, r désignant le rayon de la terre et en vertu de l'un des principes de ce numéro, on aura

$$a = a_1\left(1 + \frac{2z}{r}\right),$$

a exprimant la longueur cherchée. On voit par là que le pendule à secondes est un peu plus long au bas des hautes montagnes qu'à leur sommet. En effet, l'intensité de la pesanteur augmentant à mesure qu'on s'approche du centre de la Terre, les oscillations d'un même pendule deviennent de plus en plus rapides, il faut donc alonger le pendule à secondes pour retarder ses oscillations.

Application de la théorie précédente à la recherche de l'aplatissement de la Terre.

17. C'est par des expériences précises et des considérations analytiques semblables aux précédentes, que plusieurs savans ont déterminé les longueurs du

pendule à secondes, en différens lieux de la Terre. Voici les rapports de ces longueurs, tels qu'on les trouve dans la *Mécanique céleste* (tome II, n° 42), la longueur du pendule observée à Paris, par Bouguer, étant prise pour unité.

LIEUX des Observations.	LATITUDES.	LONGUEURS DU PENDULE à secondes centésimales de temps moyen.	NOMS des Observateurs.
Le Pérou	0gr,00	0,99669	Bouguer.
Porto-Bello	10 .61	0,99689	Bouguer.
Pondichéry	13 .25	0,99710	Le Gentil.
La Jamaïque	20 .00	0,99745	Campell.
Petit-Goave	20 .50	0,99728	Bouguer.
Le cap de Bonne-Espér.	37 .69	0,99877	La Caille.
Toulouse	48 .44	0,99950	Darquier.
Vienne, en Autriche	53 .57	0,99987	Liesganig.
Paris	54 .26	1,00000	Bouguer.
Gotha	56 .63	1,00006	Zach.
Londres	57 .22	1,00018	.....
Pétersbourg	64 .72	1,00074	Mallet.
Ponoi	66 .60	1,00101	Mallet.
Arensgberg	74 .22	1,00137	Grischow.
Pello, en Laponie	74 .53	1,00148	Maupertuis, etc.

Toutes ces mesures, qui sont réduites au vide et à la même température, peuvent être considérées comme ayant été prises au niveau des mers; les neuf premières ont été trouvées par la méthode même que Bouguer a employée au Pérou. Toutes les autres ont été conclues de la comparaison des oscillations d'un pendule invariable. Quand bien même il y aurait quelque incertitude sur toutes, l'uniformité de la méthode, comme l'observe l'auteur de la *Mécanique céleste*, doit donner, avec assez de précision, la loi de leurs variations, l'un des principaux objets à connaître.

Avant de déterminer, à l'aide de ces données, l'ellipse la plus probable qui représente la génératrice du sphéroïde terrestre, je vais donner le précis d'une méthode exposée par M. Laplace, pour remplir, relativement à cette ellipse, les conditions suivantes, savoir, 1° que la somme des erreurs commises dans les

mesures du pendule à secondes soit nulle; 2° que la somme de ces erreurs, prises toutes positivement, soit un *minimum* (*).

Pour cet effet, soient $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$... les longueurs du pendule à secondes; faisons $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, $k^{(3)}$... les quarrés des sinus des latitudes correspondantes, et supposons que ces longueurs soient exprimées par la formule $z + ky$. En nommant $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$... les erreurs des observations, on aura les équations suivantes,

$$\left.\begin{aligned} a^{(1)} - z - k^{(1)}y &= x^{(1)} \\ a^{(2)} - z - k^{(2)}y &= x^{(2)} \\ a^{(3)} - z - k^{(3)}y &= x^{(3)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^{(n)} - z - k^{(n)}y &= x^{(n)}. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Si on ajoute ces équations, et que l'on divise leur somme par leur nombre n, on trouvera, en égalant le quotient à zéro, un résultat de la forme

$$0 = A - z - Ky; \qquad (B)$$

c'est la condition à laquelle il faut satisfaire pour que la somme des erreurs soit nulle.

Maintenant, si l'on retranche cette équation de chacune des équations (A), on aura de nouvelles équations de la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} b^{(1)} - q^{(1)}y &= x^{(1)} \\ b^{(2)} - q^{(2)}y &= x^{(2)} \\ b^{(3)} - q^{(3)}y &= x^{(3)} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (O)$$

Formons la suite des quotiens $\frac{b^{(1)}}{q^{(1)}}$, $\frac{b^{(2)}}{q^{(2)}}$, $\frac{b^{(3)}}{q^{(3)}}$,... et disposons-les suivant leur ordre de grandeur, abstraction faite des signes, en commençant par les plus grands. Désignons ces quotiens, ainsi rangés, par

$$h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}\ldots\ldots \qquad (P)$$

et observons dans quel ordre leur correspondent les premiers membres des équations (O).

(*) Ce problème a d'abord été proposé et résolu par le P. Boscovich, et sa solution est rapportée à la fin de l'ouvrage qui a pour titre : *Voyage astronomique et géographique dans l'État de l'Église*; mais M. Laplace a ensuite singulièrement simplifié et généralisé les considérations que ce savant italien a employées.

Cela posé, pour avoir la valeur de y, qui rend un *minimum* la somme des erreurs prises toutes positivement, on ajoutera les quantités $h^{(1)}$, $h^{(2)}$.... jusqu'à ce que leur somme commence à surpasser la demi-somme de toutes ces quantités; ainsi, en nommant F cette somme, on déterminera r de manière que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} h^{(1)} + h^{(2)} + h^{(3)} \ldots + h^{(r)} &> \tfrac{1}{2} F \\ h^{(1)} + h^{(2)} + h^{(3)} \ldots\ldots h^{(r-1)} &< \tfrac{1}{2} F \end{aligned}\right\}; \qquad (Q)$$

alors on aura $y = h^{(r)}$, parce que, suivant la méthode actuelle, il faut faire nulle l'erreur relative à la longueur même du pendule qui correspond à celle des équations (O), dont le premier membre, égalé à zéro, donne cette valeur de y. Ensuite on aura z, au moyen de l'équation

$$z = A - \dot{K}y.$$

L'analyse précédente étant fondée sur la variation de la longueur du pendule à secondes, proportionnelle au quarré du sinus de la latitude, et cette loi de variation se manifestant également pour les grades de l'équateur aux pôles, il est clair qu'elle s'applique aux mesures de ces grades (art. 76, Géod.); voyez d'ailleurs sur cet objet la *Mécanique céleste*, tome II, n°s 40 et suivans.

Appliquons cette analyse aux mesures fournies par le tableau précédent. D'abord les équations (A) seront

$$\left.\begin{aligned}
0{,}99669 - z - y.0{,}00000 &= x^{(1)} \\
0{,}99689 - z - y.0{,}02752 &= x^{(2)} \\
0{,}99710 - z - y.0{,}04270 &= x^{(3)} \\
0{,}99745 - z - y.0{,}09549 &= x^{(4)} \\
0{,}99728 - z - y.0{,}10016 &= x^{(5)} \\
0{,}99877 - z - y.0{,}31142 &= x^{(6)} \\
0{,}99950 - z - y.0{,}47551 &= x^{(7)} \\
0{,}99987 - z - y.0{,}55596 &= x^{(8)} \\
1{,}00000 - z - y.0{,}56672 &= x^{(9)} \\
1{,}00006 - z - y.0{,}57624 &= x^{(10)} \\
1{,}00018 - z - y.0{,}61244 &= x^{(11)} \\
1{,}00074 - z - y.0{,}72307 &= x^{(12)} \\
1{,}00101 - z - y.0{,}74909 &= x^{(13)} \\
1{,}00137 - z - y.0{,}84478 &= x^{(14)} \\
1{,}00148 - z - y.0{,}84829 &= x^{(15)}
\end{aligned}\right\} \qquad (A')$$

Si on les ajoute et qu'on les divise par 15, on aura

$$0 = 0{,}99923 - z - y.0{,}43529; \qquad (B')$$

et alors les équations (O) deviendront

$$\left.\begin{array}{l}
-0,00254+y.0,43529=x^{(1)}\\
-0,00234+y.0,40777=x^{(2)}\\
-0,00213+y.0,39259=x^{(3)}\\
-0,00178+y.0,33980=x^{(4)}\\
-0,00195+y.0,33513=x^{(5)}\\
-0,00046+y.0,12387=x^{(6)}\\
0,00027-y.0,04022=x^{(7)}\\
0,00064-y.0,12067=x^{(8)}\\
0,00077-y.0,13143=x^{(9)}\\
0,00083-y.0,14095=x^{(10)}\\
0,00095-y.0,17715=x^{(11)}\\
0,00151-y.0,28778=x^{(12)}\\
0,00178-y.0,31380=x^{(13)}\\
0,00214-y.0,40949=x^{(14)}\\
0,00225-y.0,41300=x^{(15)}
\end{array}\right\}\quad (O')$$

De là il est aisé de conclure que les quotiens $\frac{b^{(1)}}{q^{(1)}}$, $\frac{b^{(2)}}{q^{(2)}}$, etc., disposés comme il est dit ci-dessus, offrent cette suite,

$$\begin{array}{lllll}
0,0067131; & 0,0058886; & 0,0058586; & 0,0058352; & 0,0058186;\\
0,0057385; & 0,0056724; & 0,0054479; & 0,0054255; & 0,0053627;\\
0,0053037; & 0,0052471; & 0,0052384; & 0,0052260; & 0,0037136,
\end{array}$$

analogue à celle (P), et dans laquelle le premier terme $h^{(1)}$ représente $\frac{b^{(7)}}{q^{(7)}}$, le second terme $h^{(2)}=\frac{b^{(10)}}{q^{(10)}}$, le troisième terme $h^{(3)}=\frac{b^{(9)}}{q^{(9)}}$, etc. Les équations (O') correspondent donc aux termes de cette suite, dans l'ordre 7, 10, 9, 1, 5, 2, 13, 15, 3, 11, 8, 12, 4, 14, 6. La somme des six premiers est plus petite que la demi-somme de tous ces termes; ainsi dans les inégalités (Q) on a $r=7$, et la septième des quantités $h^{(1)}$, $h^{(2)}$... répond à la treizième des équations (O'). De là résulte $x^{(13)}=0$, et pour lors cette treizième équation donne

$$y=0,0056724,$$

et l'équation (B') fournit

$$z=0,99676.$$

Il est démontré au n° 34 de la *Mécanique céleste*, tome II, que l'aplatissement de la Terre est égal à cinq demi du rapport de la force centrifuge à la pesanteur, moins la valeur de y; or ce rapport étant $\frac{1}{289}$, il s'ensuit que

l'aplatissement α cherché est, en prenant le petit axe de la terre pour unité,

$$\alpha = 0,00865 = \frac{1}{335,78},$$

résultat qui s'accorde d'une manière remarquable avec l'ellipticité déduite des mesures de France et de l'équateur (art. 75, Géod.). L'expression de la longueur du pendule à secondes centésimales est alors

$$0,99676 + 0,0056724 \sin^2 \downarrow, \qquad (e)$$

$\downarrow$ étant la latitude du lieu où ce pendule oscille. Si on multipliait cette expression par la longueur absolue du pendule à l'équateur, on aurait sa longueur absolue dans tout autre lieu dont la latitude $= \downarrow$; mais les expériences, déjà citées, que Borda et d'autres savans de l'Institut ont faites, il y a peu d'années, à l'Observatoire de Paris, étant plus exactes que celles de Bouguer, il convient de faire choix des premières. Si donc λ désigne la longueur du pendule à l'équateur, et λ' sa longueur à la latitude L de Paris, on aura

$$\lambda' = \lambda . (0,99676 + 0,0056724 \sin^2 L),$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \frac{\lambda'}{0,99676 + 0,0056724 \sin^2 L}.$$

Mais suivant Borda, $\lambda' = 0^m,741887$, et l'on sait que $L = 54^{gr},26$; par conséquent

$$\lambda = 0^m,741905.$$

Multipliant la formule (*e*) par ce facteur, on aura pour la longueur absolue du pendule, dans un lieu quelconque,

$$0^m,739502 + 0^m,004208 \sin^2 \downarrow.$$

Le pendule, dans l'état de repos, donne exactement la direction de la pesanteur; cependant il s'écarte un peu de la ligne verticale dans le voisinage des hautes montagnes, par l'effet de leur attraction, ainsi que Bouguer l'a observé près du Chimboraço. Ce célèbre géomètre a donné aussi le moyen d'évaluer l'angle de déviation, et de conclure par suite le rapport de la force attractive des montagnes à celle de la terre entière (*Figure de la Terre*, page 364); mais les observations les plus exactes de ce genre, sont celles que Maskeline fit en Ecosse, l'année 1774. Vu l'invariabilité de la longueur du pendule à secondes oscillant dans un même lieu, et la facilité de la retrouver dans tous les temps, plusieurs savans l'avaient proposée comme mesure universelle; néanmoins la longueur du mètre, déduite des dimensions mêmes de notre globe (art. 75, Géod.), et maintenant en usage dans tout l'Empire français, est un type qui pourra être adopté aussi par les autres nations policées, lorsqu'elles sentiront toute l'importance de l'unité de système des poids et mesures.

CHAPITRE IV.

Observations géodésiques.

18. Les deux cercles répétiteurs dont nous nous sommes servis à l'île d'Elbe étaient divisés en 400^{gr}. Le plus grand avait 35 centimètres de diamètre et était garni de quatre verniers disposés à angles droits. Cependant nous n'avons pu profiter de tous les avantages de la division décimale, parce que nous étions privés de tables trigonométriques calculées dans ce système; et c'est pour cette raison que nous avons réduit en degrés sexagésimaux tous les angles observés. Voici la règle que nous avons suivie à ce sujet.

Soit proposé de convertir en degrés sexagésimaux

l'angle de.....	101^{gr},66950
on retranche le dixième.....	10 ,166950
on a pour reste en degrés et décimales.....	91°,502550
mutipliant la fraction par 60, on obtient	91.30′,153
multipliant encore la fraction décimale par 60, il vient enfin en degrés, minutes, etc.....	91°.30′.9″,18.

S'il s'agissait de résoudre le problème inverse, on s'y prendrait de la manière suivante. Pour convertir en grades, par exemple, l'angle de 91°.30′.9″,18, on réduit les secondes en fraction décimale de minute, en divisant 9″,18 par 60, et il vient..... 91°.30′,153

On réduit les minutes en fraction décimale de degré, en divisant de même par 60, et l'on trouve	91°,50255
on ajoute le neuvième.....	10,16695
et l'on a en grades.....	101^{gr},66950

Ces deux règles sont évidemment fondées sur ce que le grade est au degré :: 10 : 9.

Nous n'avons pas eu égard à l'excentricité de la lunette inférieure, parce que nous avons reconnu que son effet était insensible; et lorsque nous étions privés de la *lunette d'épreuve*, nous employons le procédé suivant, pour disposer l'axe optique parallèlement au plan du limbe. Quand ce plan était vertical et que le cercle azimutal était horizontal, nous amenions les deux lunettes sur un objet éloigné, ensuite nous faisions faire exactement une demi-révolution à l'instrument, puis nous ramenions ces lunettes sur l'objet; alors si les fils n'avaient point de parallaxe (art. 49, Géod.), leur intersection couvrait précisément le point de mire; autrement nous établissions la coïncidence, moitié à l'aide des vis de rappel des réticules, moitié au moyen de la vis d'engrenage de l'alidade du cercle azimutal. Ce procédé, dont il est facile de sentir la raison, serait exact sans les imperfections peut être inévitables de l'instrument; aussi vaut-il mieux, en pareil cas, recourir à la lunette d'épreuve.

STATION A POPOLONIA (*Tour près de la mer*).

ANGLE

entre le signal de Capane et celui de la Calamite.

Fig. 9. Après vingt observations..... l'angle simple = 32°.20′.18″,06.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Capane.

Après six observations..... l'angle simple = 88°.49′.15″,6.

Signal de Calamite.

Après six observations..... l'angle simple = 89°.41′.54″,6.

Nota. Toutes les distances au zénit ont été conclues de six ou de quatre observations; ce qui était suffisant, vu la petitesse de nos triangles.

Élémens de la réduction des angles au centre et au sommet du signal.

Distance de l'horizon de la mer au zénit de la tour = 90°.25′.6″,6.
Hauteur du signal au-dessus de l'instrument, $dH = 8^m,4$.
Distance du centre de l'instrument au centre du signal ..... $r = 0^m,9$.
Angle de direction ..... $y = 101°.15'.32'',4$.

Nota. Pendant toutes les observations, le centre de l'instrument était élevé de 1^m environ au-dessus du sol.

STATION A MONTE-CAPANE (*Ile d'Elbe*).

ANGLE

entre le signal de Calamite et la tour de Popolonia.

Dix observations..... angle simple = 56°.9′.34″,2.

Nota. Le temps n'a pas permis de prolonger davantage cette série.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Calamite.

Angle simple..... 91°.26′.30″.

Signal de Popolonia.

Angle simple..... 91°.50′.30″.

Élémens de la réduction des angles.

$dH = 8^m,8$; $r = 1^m,9$; $y = 72°.27'.10''$.

ANGLE

entre le fanal de Porto-Ferraïo et le signal de Calamite.

Douze observations..... angle simple 33°.45′.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Fanal de Porto-Ferraïo.

Angle simple..... 93°.44′.30″.

Signal de Calamite.

Angle simple..... 91°.48′.30″.

Élémens de la réduction des angles.

$dH = 8^m,8$; $r = 1^m,4$; $y = 106°.14′$.

STATION A MONTE-CALAMITE.

ANGLE

entre Capane et Popolonia.

Vingt observations..... angle simple 91°.30′. 9″,18.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Capane.

Angle simple..... 88°.15′.30″, 6.

Signal de Popolonia.

Angle simple..... 90°.30′.53″,28.

Élémens de la réduction des angles.

$dH = 2^m$; $r = 1^m,01$; $y = 29°.41′.27″,6$.

ANGLE

entre Capane et le fanal de Porto-Ferraïo.

Dix observations..... angle simple 48°.31′.49″,548.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Capane.

Angle simple..... 88°.15′.30″,6.

Fanal.

Angle simple..... 91°.51′.30″.

Élémens des réductions.

$dH = 2^m$; $r = 1^m,05$; $y = 28°.53'.17'',52$.

ANGLE

entre le Fanal et Lorello.

Seize observations..... angle simple 20°. 1′.30″.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Fanal.

Angle simple..... 91°.51′.30″.

Signal de Lorello.

Angle simple..... 90°.14′.

Elémens des réductions.

$dH = 2^m$; $r = 1^m$; $y = 70°.2'.40''$.

ANGLE

entre Castello et Lorello (observations faites au centre.)

Seize observations..... angle simple 44°.20′.21″,88.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Castello.

Angle simple..... 89°.9′.

Signal de Lorello.

Angle simple..... 90°.15′.37″,5.

Hauteur du signal au-dessus de l'instrument, $dH = 2^m$.

ANGLE

entre Castello et Monte-Arco.

Dix observations..... angle simple 22°.59′.56″.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Castello.

Angle simple..... 89°.9′.

Signal de Monte-Arco.

Angle simple..... 91°.10′

Elémens des réductions.

$dH = 2^m$; $r = 1^m,14$; $y = 143°.23'$.

STATION A PORTO-FERRAIO (*Fanal*).

ANGLE

entre Calamite et Capane.

Vingt observations..... angle simple 97°.43′.53″,544.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Calamite.

Angle simple..... 88°. 9′.18″.

Signal de Capane.

Angle simple..... 86°.15′.11″,88.

Elémens des réductions.

$dH = 7^m,8$; $r = 2^m,65$; $y = 97°.48'.59'',4$.

Nota. Nous avons pris pour sommet du fanal le centre de la boule qui couronne la lanterne et qui est surmontée d'une petite croix. Ce sommet, ou point de mire, est élevé de $68^m,5$ au-dessus du niveau de la mer, ainsi que M. Moynet l'a trouvé par une mesure directe.

ANGLE

entre Lorello et Calamite.

Quatorze observations..... angle simple 42°.40′.55″,84.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Lorello.

Angle simple..... 85°.36′.30″.

Signal de Calamite.

Angle simple..... 88°. 9′.18″.

Elémens des réductions.

$dH = 7^{m},8$; $r = 2^{m},5$; $y = 98°.20'.51''$.

ANGLE

entre Castello et Lorello.

Seize observations..... angle simple 77°. 8′.34″.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Castello.

Angle simple..... 84°.37′.

Signal de Lorello.

Angle simple..... 85°.36′.30″.

Elémens des réductions.

$dH = 7^{m},8$; $r = 2^{m},43$; $y = 64°.43'$.

STATION A MONTE-LORELLO.

ANGLE

entre le Fanal et Castello.

Quatorze observations..... angle simple 59°.24′.20″.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Fanal de l'île d'Elbe.

Angle simple..... 94°.16′.40″.

Signal de Castello.

Angle simple..... 88°.36′.30″.

Elémens des réductions.

$dH = 2^{m},8$; $r = 1^{m},66$; $y = 144°.28'$.

ANGLE

entre Calamite et Castello. (Observations faites au centre.)

Quatorze observations..... angle simple 58°.11′.54″,52.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Calamite.

Angle simple..... 89°.46′.

Signal de Castello.

Angle simple..... 88°.36′.30″.

Hauteur du signal au-dessus de l'instrument, $dH = 2^m,8$.

ANGLE

entre le Fanal et Calamite.

Vingt observations..... angle simple 117°.18′.30″.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Fanal.

Angle simple..... 94°.15′.

Signal de Calamite.

Angle simple..... 89°.44′.30″.

Elémens des réductions.

$dH = 2^m,8$; $r = 1^m,52$; $y = 52°.27′$.

STATION A MONTE-CASTELLO.

ANGLE

entre le Fanal et Lorello.

Douze observations..... angle simple 43°.27′.10″.

DISTANCES AU ZENIT.

Fanal.

Angle simple..... 94°.59′.

Signal de Lorello.

Angle simple..... 91°.22′.30″.

Elémens des réductions.

$dH = 2^m,6$; $r = 1^m$; $y = 134°.19'$.

ANGLE

entre Calamite et Lorello. (Observations faites au centre.)

Quatorze observations..... angle simple 77°.27'.51",25.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Calamite.

Angle simple..... 90°.48'.

Signal de Lorello.

Angle simple..... 91°.21'.30".
Hauteur du signal au-dessus du cercle..... $dH = 2^m,6$.

ANGLE

entre Calamite et Arco.

Seize observations..... angle simple 66°. 2'.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Calamite.

Angle simple..... 90°.50'.

Signal de Monte-Arco.

Angle simple..... 94°.52'.

Elémens des réductions.

$dH = 2^m,6$; $r = 1^m$; $y = 196°.43'$.

ANGLE

entre Monte-Arco et le clocher de la citadelle de Porto-Longone.

Douze observations..... angle simple 52°.21'.30".

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Monte-Arco.

Angle simple..... 94°.52'.

Clocher de la citadelle de Longone.

Angle simple..... 97°. 9′.

Elémens des réductions.

$dH = 2^m,6$; $r = 1^m$; $y = 27°.34$.

STATION A MONTE-ARCO.

ANGLE

entre Castello et le clocher de la citadelle de Longone.

Dix-huit observations..... angle simple 76°.14′.15″.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Castello.

Angle simple..... 85°. 3′.22″,5.

Signal de Longone.

Angle simple..... 93°.54′.

Elémens des réductions.

$dH = 2^m,3$; $r = 2^m,6$; $y = 123°.43'$.

ANGLE

entre Calamite et Castello.

Vingt observations..... angle simple 91°.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Calamite.

Angle simple..... 88°.47′. 7″,5.

Signal de Castello.

Angle simple..... 85°. 1′.30″.

Elémens des réductions.

$dH = 2^m,3$; $r = 2^m,7$; $y = 96°.56$.

STATION A PORTO-LONGONE. (*Clocher de la Citadelle.*)

ANGLE

entre Castello et Monte-Arco.

Dix observations..... angle simple 51°.27′.15″.

DISTANCES AU ZÉNIT.

Signal de Castello.

Angle simple..... 82°.44′.15″.

Signal de Monte-Arco.

Angle simple..... 86°.

Elémens des réductions.

$dH = 8^m,3$; $r = 0^m,44$; $y = 36°.18''$.

Nota. Pour abréger, je supprime toutes les observations relatives aux autres triangles secondaires qui complètent la géodésie de l'île d'Elbe ; mais la plupart de ces triangles sont tracés sur la petite carte comprise sous le n° 9 de la première planche de cet Ouvrage, afin que l'on puisse connaître la liaison qui existe entre eux.

On sera sans doute surpris de voir, par le registre précédent, que nous ayons aussi souvent changé de place l'instrument, à une même station. Nous aurions pu, il est vrai, éviter ce déplacement, dans certains cas, et diminuer un peu par ce moyen la longueur des calculs de réductions ; mais aussi dans beaucoup d'autres cas cela devenait indispensable, soit pour mieux appercevoir les signaux, soit parce que le mauvais temps nous forçait d'abandonner subitement le lieu de l'observation, soit enfin parce que ayant acquis une connaissance plus exacte du terrain, nous étions dans la nécessité de retourner à plusieurs stations pour y relever des angles de quelques triangles qu'il était nécessaire d'ajouter au réseau.

CHAPITRE V.

Calcul approximatif des distances.

119. On ne peut réduire aux centres des stations les angles observés, qu'après avoir calculé tous les côtés des triangles. Ce calcul préliminaire et approximatif s'effectue par la méthode expliquée à l'art. 55 (Géod.), et en supposant que les *angles de position* ou les distances angulaires entre les signaux ont été pris aux centres mêmes des stations.

Les vestiges du signal que M. Tranchot établit sur le sommet de *Monte-Capane*, à l'époque où il fit la triangulation de la Corse, nous mirent à même de rétablir ce signal précisément à la place qu'il occupait; et comme il résulte des calculs de cet ingénieur, et de ceux de Méchain, que la distance de ce signal à la tour de *Popolonia* est, au niveau de la mer, de 18391^{toises},063; ce côté, réduit en mètres et pris pour base, a pour logarithme 4, 5544 268. Cela posé, on a, ainsi qu'il suit, pour déterminer les distances horizontales comprises entre les stations.

Le côté connu étant celui *Capane-Popolonia*, c'est par la résolution du triangle *Calamite-Popolonia-Capane* qu'il s'agit de commencer; ainsi, en vertu de l'article cité, on a ces deux proportions :

1°. Sin. angle *Calamite* : sin. angle *Popolonia*
:: côté *Capane Popolonia* : côté *Calamite-Capane;*

2°. Sin. angle *Calamite* : sin. angle *Capane*
:: côté *Capane-Popolonia* : côté *Popolonia-Calamite.*

Les calculs relatifs à ce triangle et aux six autres qui forment le réseau pris pour exemple, sont renfermés dans le tableau suivant.

Nos.	NOMS des SIGNAUX.	ANGLES OBSERVÉS.	CALCUL APPROXIMATIF DES COTÉS.
1	Calamite..	91°.30′. 9″,18	*Côté* Calamite-Capane. — *Côté* Popolonia-Calamite.
	Popolonia.	32 .20 .18 ,06	Comp. sin. Calamite 0,00015 0,00015
	Capane ...	56 . 9 .34 ,20	Capane-Popolonia 4,55443 4,55443
		180°. 0′. 1″,44	Sin. Popolonia 9,72829 sin. Capane 9,91939
			4,28287 — 4,47397
2	Calamite..	48°.31′.49″,548	*Côté* Fanal-Capane. — *Côté* Fanal-Calamite.
	Fanal.....	97 .43 .53 ,544	C. sin. Fanal 0,00397 0,00397
	Capane ...	33 .45 . 0	Calamite-Capane 4,28287 4,28287
		180°. 0′.43″,092	Sin. Calamite 9,87466 sin. Capane 9,74474
			4,16150 — 4,03158
3	Calamite..	20°. 1′.30″	*Côté* Fanal-Lorello. — *Côté* Calamite-Lorello.
	Fanal.....	42 .40 .55 ,84	C. sin. Lorello 0,05132 0,05132
	Lorello ...	117 .18 30	Fanal-Calamite 4,03158 4,03158
		180°. 0′.55″,84	Sin. Calamite 9,53457 sin. Fanal 9.83118
			3,61747 — 3,91408
4	Calamite..	44°.20′.21″,88	*Côté* Calamite-Castello. — *Côté* Castello-Lorello.
	Castello...	77 .27 .51 ,25	C. sin. Castello 0,01048 0,01048
	Lorello ...	58 .11 .54 ,52	Calamite-Lorello 3,91408 3,91408
		180°. 0′. 7″,65	Sin. Lorello 9.92935 sin. Calamite 9,84442
			3,85391 — 3,76898
5	Castello...	43°.27′.10″	*Côté* Fanal-Castello. — *Côté* Fanal-Lorello.
	Lorello ...	59 .24 .20	C. sin. Fanal 0,01103 0,01103
	Fanal.....	77 . 8 .34	Castello-Lorello 3,76898 3,76898
		180°. 0′. 4″	Sin. Lorello 9.93489 sin. Castello 9,83743
			3,71490 — 3,61744 { comme ci-dessus. }
6	Calamite..	22°.59′.56″	*Côté* Arco-Castello. — *Côté* Calamite-Arco.
	Arco	91 . 0 . 0	C. sin. Arco 0,00007 0,00007
	Castello...	66 . 2 . 0	Calamite-Castello 3,85391 3,85391
		180°. 1′.56″	Sin. Calamite 9,59186 sin. Castello 9,96084
			3,44584 — 3,81482
7	Longone..	51°.27′.15″	*Côté* Longone-Castello. — *Côté* Longone-Arco.
	Arco	76 .14 .15	C. sin. Longone 0,10673 0,10673
	Castello...	52 .21 .30	Arco-Castello 3.44584 3,44584
		180°. 3′. 0″	Sin. Arco 9,98735 sin. Castello 9,89864
			3,53992 — 3,45121

CHAPITRE VI.

Réductions au centre et à l'horizon, calcul de l'excès sphérique.

20. Les angles observés se réduisent au centre de la station, à l'aide de l'une des formules du n° 2. Par la première, par exemple, on a, en faisant usage des élémens recueillis à la station *Popolonia*, et rapportés au n° 18, et de ceux obtenus au n° 19.

Réduction au centre.

Angle de position, $O = 32°.20'.18'',06$
angle de direction, $y = 101.15.32,4$
distance au centre, $r = 0^m,9$
log. de la distance de l'objet à droite, $D = 4,55443$
log. de la distance de l'objet à gauche, $G = 4,47397$.

1er terme de la correction.			2e terme.
Log. R'' = 5,31443			
log. r = 9,95424			
+ 5,26867			— 5,26867
log. sin $(O+y)$ + 9,85986		log. sin y + 9,99156	
comp. log. D.... 5,44557		comp. log. G.... 5,52603	
+ 3″,750 + 0,57410		— 6″,113	— 0,78626
		+ 3,750	
	réduction,	— 2″,363	
	angle observé	32°.20′.18,060	
	angle réduit au centre	32°.20′.15″,697 = C.	

On n'a qu'un terme à calculer, quand on se sert de la seconde formule du n° 2 : en effet, elle donne, à cause de sin A = sin. angle *Capane* = 9,91939, (n° 19),

$$\begin{aligned}
\text{Log. } R'' &= 5{,}31443 \\
\log. r &= 9{,}95424 \\
\text{sin. } O &= 9{,}72829 \\
\sin(A-y) &= -9{,}85024 \\
\text{comp. sin } A &= 0{,}08061 \\
\text{c. log } D &= 5{,}44557 \\
&= -0{,}37338 = -2'{,}3626.
\end{aligned}$$

Ainsi la réduction est la même que ci-dessus. Quant à la règle des signes, voyez ce qui est dit à la page 91 (Géod.).

L'Instruction du Dépôt général de la Guerre, sur la disposition et la tenue des registres de calculs géodésiques, renferme des Tables qui, relativement aux triangles secondaires, tiennent lieu des calculs précédens; cependant je pense qu'il est presque aussi expéditif de les effectuer, vu le très-petit nombre de logarithmes à chercher.

Réduction à l'horizon.

J'ai employé, selon le besoin, l'une des formules du n° 3, pour réduire à l'horizon les angles de nos triangles. Mais en pareil cas on épargnera beaucoup de tems, en faisant usage de la division du cercle en 400^{gr}, et des Tables I et II du Traité de Géodésie. La seconde formule du numéro cité donne pour l'angle précédent $32°.20'.15'',7$, une réduction $= -31'',73$; en effet, on a

$$\begin{aligned}
\delta &= 89°.41'.54'',6 \\
\delta' &= 88.49.15,6 \\
\delta+\delta' &= 178°.31'.10'',2 \ldots\ldots \delta-\delta' = 0°.52'.39''
\end{aligned}$$

$$90° - \frac{\delta+\delta'}{2} = 0.44.24,9 \qquad \frac{\delta-\delta'}{2} = 0.26.19,5$$

$$2664'',9 = p \qquad 1579'',5 = q.$$

	1er terme positif.		2e terme négatif.
c. log R'', ou sin 1″ =	4,68557		4,68557
log p^2 =	6,85136	log q^2 =	6,39704
l. tang $\frac{1}{2}C$ =	9,46228	l. cot. $\frac{1}{2}C$ =	0,53764
	+ 0,99921 = 9″,98		— 1,62025 = 41″,71
	— 41 ,71		
réduction	— 31″,73		

angle réduit au centre,
ou C . . . . . = 32°.20′.15″,70
angle réduit à l'horiz.,
ou *angle sphérique* = 32 .19 .43 ,97.

Après avoir réduit à l'horizon les trois angles d'un même triangle, on les corrige chacun du tiers de l'excès de leur somme sur deux angles droits (art. 68, Géod.). Les *angles moyens* qui résultent de cette opération, sont ceux dont on fait usage pour résoudre derechef les triangles. C'est en procédant de cette manière, que j'ai formé le Tableau suivant.

N°s.	NOMS des SIGNAUX.	ANGLES AU CENTRE.	ANGLES A L'HORIZON.	ANGLES MOYENS.
1	Popolonia..	32°.20′.15″,70	32°.19′.43″,97	32°.19′.42″,92
	Capane....	56 . 9 .37 ,38	56 .11 . 3 ,01	56 .11 . 1 ,98
	Calamite..	91 .30 . 9 ,78	91 .29 .16 ,15	91 .29 .15 ,10
			180°. 0′. 3″,13	180°. 0′. 0″
2	Calamite...	48°.32′. 3″,75	48°.24′.31″,50	48°.24′.31″
	Fanal.....	97 .42 .53 ,08	97 .51 .26 ,55	97 .51 .26
	Capane....	33 .44 .50 ,56	33 .44 . 3 ,50	33 .44 . 3
			180°. 0′. 1″,55	180°. 0′. 0″
3	Calamite...	20°. 1′.25″,55	19°.57′.42″,72	19°.57′.42″,13
	Fanal.....	42 .41 .26 ,65	42 .41 . 4 ,44	42 .41 . 4 ,55
	Lorello....	117 .17 .36 ,67	117 .21 .13 ,42	117 .21 .13 ,32
			180°. 0′. 0″,58	180°. 0′. 0″
4	Calamite...	44°.20′.21″,88	44°.19′.37″,64	44°.19′.37″,24
	Castello....	77 .27 .51 ,25	77 .28 .43 ,84	77 .28 .43 ,44
	Lorello....	58 .11 .54 ,52	58 .11 .39 ,72	58 .11 .39 ,32
			180°. 0′. 1″,20	180°. 0′. 0″
5	Fanal.....	77°. 8′.21″,30	77°.28′. 3″,66	77°.28′. 3″,52
	Castello....	43 .26 .46 ,42	43 .22 .24 ,74	43 .22 .23 ,54
	Lorello....	59 .23 . 7 ,39	59 . 9 .33 ,74	59 . 9 .32 ,94
			180°. 0′. 2″,14	180°. 0′. 0″
6	Calamite...	22°.59′.44″,84	22°.54′.31″,10	22°.54′.30″
	Castello....	66 . 1 .52 ,60	66 . 0 .50 ,60	66 . 0 .49
	Arco.....	90 .58 . 7 ,75	91 . 4 .42 ,40	91 . 4 .41
			180°. 0′. 4″,10	180°. 0′. 0″
7	Castello....	52°.21′.54″,39	52°.37′.48″,42	52°.37′.46″,58
	Arco.....	76 .10 .31 ,53	75 .44 .29 ,58	75 .44 .27 ,74
	Longone...	51 .27 .31 ,60	51 .37 .47 ,52	51 .37 .45 ,68
			180°. 0′. 5″,52	180°. 0′. 0″

21. Maintenant, pour juger du degré d'exactitude des angles, il faudrait déterminer l'excès sphérique de chaque triangle; mais le seul triangle qui ait réellement une courbure un peu sensible étant celui compris sous le n° 1, je me bornerai à donner le calcul de son excès sphérique, et j'adopterai en conséquence la méthode de la page 116 (Géod.).

Log. 0,5	= 9,6990
log. Popolonia-Capane	= 4,5544
log. Popolonia-Calamite	= 4,4739
sin. angle à Popolonia	= 9,7281
log. aire du triangle	= 8,4554
log. constant	= 1,7066
log. excès sphérique	= 0,1620 = 1″,45;

ainsi l'excès sphérique = 1″,45 de la division nonagésimale. On pourrait de même le déterminer, au moyen de la Table qui se trouve à la fin de cet Ouvrage. Pour cet effet, on mesurera avec un compas la plus courte distance du sommet *Calamite* au côté *Popolonia-Capane*, pris pour base, et portant cette longueur sur l'échelle, on la trouvera de 16000^{mèt} environ; on mesurera de même la base dont il s'agit, et on la trouvera de 36000^{m}; ensuite la table donnera

1°. Pour 36000 de base et 10000 de hauteur..... 2″,82.
2°. Pour 36000 de base et 6000 de hauteur..... 1″,69.

D'où il suit que l'excès sphérique..... = 4″,51

de la division centésimale; c'est-à-dire le même que ci-dessus.

La somme des trois angles du premier triangle surpasse 180°, de 3″,13; et l'excès sphérique n'est que de 1″,45; donc la somme des erreurs = + 1″,68. Otant alors sur chaque angle le tiers de cette dernière somme, les angles sphériques seront dégagés de l'erreur de l'observation; ainsi l'angle

à Popolonia	= 32°. 19′. 43″,41
à Calamite	= 91 . 29 . 15 ,59
à Capane	= 56 . 11 . 2 ,45
	180°. 0′. 1″,45.

Telles seraient les valeurs à employer si l'on voulait résoudre les triangles comme sphériques (art. 19, Géod.).

La méthode précédente ne fait pas connaître la différence de l'angle sphérique à l'angle des cordes correspondant. Cet excès se trouve par l'un des procédés de l'art. 55 (Géod.), et quand on a bien opéré, la somme des trois excès s'accorde avec l'excès sphérique du même triangle. Si les angles sphériques précédens étaient réduits aux angles des cordes, il est évident que leur somme serait exactement de 180°. Ce seraient ces derniers que l'on emploierait pour résoudre les triangles rectilignes formés par les cordes qui joignent les stations. M. Delambre a calculé tous les triangles de la méridienne établie depuis Dunkerque jusqu'à Mont-Joui, non-seulement par ces deux méthodes, mais encore par celle de M. Legendre, dont nous faisons exclusivement usage dans ce Traité. Ces triples calculs, qui se servent mutuellement de preuve, se font avec assez de facilité. (*Base du Système métrique, page* 512, *Tom. I.*)

CHAPITRE VII.

Détermination exacte des distances.

22. Les réductions précédentes sont les seules que nous ayons eu à faire ; parce que nos signaux, pour la plupart, formés de petits mâts ou de longues perches bien droites enveloppées de feuillages, n'offraient aucune phase qui pût donner lieu à de nouvelles corrections. Il ne restait donc qu'à déterminer rigoureusement les longueurs des côtés des triangles, à l'aide de la base connue et des angles moyens horizontaux calculés ci-dessus.

Il est important, dans ces derniers calculs, d'employer les logarithmes avec sept décimales au *moins*; et lorsque la carte comprend un grand espace, il faut avoir soin de déterminer les côtés du réseau triangulaire qui sont éloignés des bases mesurées ou des lignes qui en tiennent lieu, au moyen de plusieurs chaînes dont les extrémités sont ces bases elles-mêmes et ces côtés; afin que les résultats obtenus de cette manière puissent se servir de preuve mutuellement (art. 69, Géod.). Si ces résultats ne diffèrent entre eux que dans les décimètres, on divise leur somme par leur nombre, pour avoir ce que l'on appelle une *longueur moyenne*. Voici comment on procède aux calculs dont il s'agit.

N°s.	NOMS des STATIONS.	ANGLES MOYENS.	CALCUL EXACT DES COTÉS.	
			Côté Calamite-Capane.	*Côté* Popolonia-Calamite.
1	Calamite...	91°.29′.15″,10	Comp. sin. Calamite 0,0001464	 0,0001464
	Popolonia..	32 .19 .42 ,92	Capane-Popolonia 4,6544268	 4,6544268
	Capane....	56 .11 . 1 ,98	Sin. Popolonia 9,7281703	sin. Capane 9,9195111
		180°. 0′. 0″	19175m,36 = 4,2827435	29790m,96 = 4,4740843
			Côté Fanal-Capane.	*Côté* Fanal-Calamite.
2	Calamite...	48°.24′.31″	C. sin. Fanal 0,0040965	 0,0040965
	Fanal.....	97 .51 .26	Calamite-Capane 4,2827435	 4,2827435
	Capane....	33 .44 . 3	Sin. Calamite 9,8738423	sin. Capane 9,7445593
		180°. 0′. 0″	14477m,12 = 4,1606823	10749m,78 = 4,0313993
			Côté Fanal-Lorello.	*Côté* Calamite-Lorello.
3	Fanal.....	42°.41′. 4″,55	C. sin. Lorello 0,0514956	 0,0514956
	Lorello....	117 .21 .13 ,32	Fanal-Calamite 4,0313993	 4,0313993
	Calamite...	19 .57 .42 ,13	Sin. Calamite 9,5332532	sin. Fanal 9,8312054
		180°. 0′. 0″	4131m,88 = 3,6161481	8205m,41 = 3,9141003
			Côté Calamite-Castello.	*Côté* Castello-Lorello.
4	Calamite...	44°.19′.37″,24	C. sin. Castello 0,0104543	 0,0104543
	Castello....	77 .28 .43 ,44	Calamite-Lorello 3,9141003	 3,9141003
	Lorello.....	58 .11 .39 ,32	Sin. Lorello 9,9293371	sin. Calamite 9,8443233
		180°. 0′. 0″	7143m,18 = 3,8538917	5873m,24 = 3,7688779
			Côté Castello-Lorello (*comme ci-dessus*).	*Côté* Fanal-Castello.
5	Fanal.....	77°.28′. 3″,52	C. sin. Castello 0,1632028	 0,1632028
	Castello....	43 .22 .23 ,54	Fanal-Lorello 3,6161481	 3,6161481
	Lorello.....	59 . 9 .32 ,94	Sin. Fanal 9,9895270	sin. Lorello 9,9337882
		180°. 0′. 0″	5873m,24 = 3,7688779	5165m,82 = 3,7131391
			Côté Calamite-Arco.	*Côté* Castello-Arco.
6	Calamite...	22°.54′.30″	C. sin. Arco 0,0000768	 0,0000768
	Arco.....	91 . 4 .41	Calamite-Castello 3,8538917	 3,8538917
	Castello....	66 . 0 .49	Sin. Castello 9,9607761	sin. Calamite 9,5902375
		180°. 0′. 0″	6527m,47 = 3,8147446	2781m,04 = 3,4442060
			Côté Longone-Castello.	*Côté* Longone-Arco.
7	Castello....	52°.37′.46″,58	C. sin. Longone 0,1056775	 0,1056775
	Longone...	51 .37 .45 ,68	Castello-Arco 3,4442060	 3,4442060
	Arco.....	75 .44 .27 ,74	Sin. Arco 9,9804100	sin. Castello 9,9002187
		180°. 0′. 0″	3437m,9 = 3,5362935	2819m,05 = 3,4501022

CHAPITRE VIII.

Calcul des distances à la méridienne et à la perpendiculaire; détermination des latitudes, longitudes et azimuts.

23. POUR orienter nos triangles, nous avons observé, sur le fanal de Porto-Ferraïo, l'angle entre le soleil levant et le signal de Monte-Capane, et par un milieu pris entre les résultats de trois observations de ce genre, faites avec le cercle répétiteur, l'azimut du côté Fanal-Capane, compté du sud à l'ouest, ou, ce qui est de même, l'inclinaison de ce côté sur le méridien du fanal s'est trouvé de 69°.54′.2″,69. Le tableau ci-dessous renferme la série des calculs que j'ai effectués de mon côté pour déterminer les distances des stations à la méridienne et à la perpendiculaire du fanal. Dans ce calcul j'ai pu faire abstraction du très-petit excès sphérique des triangles ; ainsi je me suis conformé en cela à la méthode de l'art. 73, (Géod.). Quant aux signes de ces coordonnées, j'ai suivi cette règle de convention, savoir, 1°. que les distances à la méridienne sont positives lorsque les stations sont à l'est du fanal, et négatives quand les stations sont à l'ouest; 2°. que les distances à la perpendiculaire sont positives quand les stations sont au nord du fanal, et négatives lorsque ces mêmes stations sont au sud. Il en est de même à l'égard de toute station comparée avec un lieu autre que le fanal.

NOMS des STATIONS.	COORDONNÉES RELATIVES, ou DISTANCES à la méridienne		à la perpendiculaire	COORDONNÉES absolues, OU DISTANCES à la mérid. du fanal.	à la perpend. du fanal.
		du Fanal.		y	x
Capane...	côté Fanal-Capane	4,1606823	 4,1606823		
	Sin. inclinaison	9,9727113	cos. 9,5361131		
		—13595m,45 = 4,1333936	— 4975m,03 = 3,6967954	—13595m,45	— 4975m,03
		du Fanal.			
Calamite.	Calamite - Fanal	4,0313993	 4,0313993		
	Sin. 27°.57′.23″,86	9,6709664	cos. 9,9461096		
		+ 5039m,53 = 3,7023897	— 9495m,3 = 3,9775089	+ 5039 ,53	— 9495 ,30
		du Fanal.			
Lorello...	Fanal - Lorello	3,6161481	 3,6161481		
	Sin. 14°.43′.40″,69	9,4052269	cos. 9,9854855		
		— 1050m,43 = 3,0213750	— 3996m,08 = 3,6016336	— 1050 ,43	— 3996 ,08
		du Fanal.			
Castello...	Fanal - Castello	3,7131391	 3,7131391		
	Sin. 62°.44′.22″,97	9,9488699	cos. 9,6608973		
		+ 4592m,08 = 3,6620090	— 2366m,12 = 3,3740364	+ 4592 ,08	— 2366 ,12
		de Calamite.			
Arco.....	Arco - Calamite	3,8147446	 3,8147446		
	Sin. 19°.18′.59″,55	9,5195483	cos 9,9748364		
		+ 2159m,2 = 3,3342929	+ 6160m,01 = 3,7895810	+ 7198 ,73	— 3334 ,29
		d'Arco.			
Longone..	Longone - A...	3,4501022	 3,4501022		
	Sin. 34°.39′.12″,37	9,5481...	de la réf... 9,9151921		
		— 1602m,94 = 3,20...	d'ailleurs qu... = 3,3652943	+ 5595 ,79	— 5653 ,25
		d...	3,600		
Popolonia.	Popolonia - Calamite	4,4740843	 4,4740843		
	Sin. 15°.7′.20″,79	9,4164451	cos. 9,9846941		
		+ 7771m,94 = 3,8905294	+ 28759m,30 = 4,4587784	+12811 ,47	+19264 ,0.

Voici comment on obtient les coordonnées des sommets des triangles, par rapport à la méridienne et à la perpendiculaire de Porto-Ferraïo. Si l'on connaît, par exemple, les coordonnées *absolues* de Monte-Calamite, on aura celles de Monte-Arco, en calculant d'abord les coordonnées de cette station par rapport à deux lignes passant par Monte-Calamite, et respectivement parallèles à la méridienne et à la perpendiculaire du fanal; on aura ensuite les coordonnées absolues dont il est question, en ajoutant celles de Monte-Calamite avec les coordonnées *relatives* de Monte-Arco : bien entendu que les coordonnées de même dénomination doivent être combinées ensemble et prises chacune avec son signe. Voyez d'ailleurs à ce sujet l'article cité du Traité de Géodésie, et le tableau précédent.

Il faut bien remarquer que, dans ce tableau, j'ai désigné, pour abréger, par *méridienne* et *perpendiculaire* de Calamite, d'Arco, etc., des lignes seulement parallèles à la méridienne et à la perpendiculaire de Porto-Ferraïo, et qui, par cette raison, convergent avec les véritables méridiennes et perpendiculaires de ces lieux; ainsi les inclinaisons 19°.18′.59″,55; 34°.39′.12″,37, etc. ne sont que des azimuts approchés. Je ferai voir ci-dessous comment on déduit les azimuts vrais.

24. Nous n'avons point observé de latitude à l'île d'Elbe; mais nous avons pu conclure très-exactement la latitude du Fanal de Porto-Ferraïo, d'après ses distances à la méridienne et à la perpendiculaire de Tolare (île de Corse). Voici toutes les données qui nous ont servi à ce sujet.

Suivant M. Tranchot,

la latitude observée de Tolare $= 43°.0'.34'' = L$.

La différence des méridiens entre cette tour et l'Observat[illegible] $= -7°.2'.33'',6$ (compt. vers l'Est);

La distance du fanal de [illegible] à la méridienne de Tolare..... $= 39732^{toi.},16 = +y$, Est.

et sa distance à la perpendiculaire du même lieu..... $= 10664\ ,04 = -x$, Sud.

Pour avoir ces distances en mètres, il faut, aux logarithmes

des distances actuelles, ajouter le logarithme constant 0,2898199; ainsi

log. 39732',16 = 4,5991422	log. 10664',04 = 4,0279217
log. constant..... 0,2898199	 0,2898199
log. y en mètres = 4,8889621;	log. x en mètres = 4,3177416.

Calcul de la latitude de Porto-Ferraïo.

(1ere formule (C) n° 5).

Le logarithme du rayon de courbure r de l'arc du méridien est, à la latitude de Tolare, = 6,8037413 (n° 9); on fera donc ce calcul pour trouver l'amplitude φ de la distance x,

$$\log R'' = 5,31443$$
$$\log x = -4,31774$$
$$\text{comp. log } r = 3,19626$$
$$-2,82843 = 673'',64 = 11'.13'',64 = \varphi.$$

De là $L - \varphi = 42°.49'.20'',36$; telle est la latitude du pié de la perpendiculaire y: on aura celle de son sommet par le calcul suivant; sachant d'ailleurs que le log. du rayon de courbure r' de l'arc perpendiculaire au méridien de Tolare = 6,8051359 (n° 9).

$$\log y = 4,8889621$$
$$\text{c. log } r' = 3,1948641$$
$$\log \frac{y}{r'} = 8,0838262$$
$$\log \frac{y^2}{r'^2} = 6,1676524$$

1er terme.

$\log \frac{1}{2} = 9,6989700$

$\log R'' = 5,3144251$

$\log \frac{y^2}{r'^2} = 6,1676524$

$\text{tang}(L-\varphi) = 9,9669553$

$-1,1480028 = -14'',06$

$-0,05$

Correction $-14'',11$.

de la réfra... d'ailleurs qu... = 3.60...

2e terme.

$(L-\varphi) = 9,86538$

..... 9,86538

$\log e^2 = 7,77663$

log. du 1er terme... = 1,14800

$-8,65539 = -0'',05$

Donc la latitude de Porto-Ferraïo $= L' = (L - \varphi) - 14'',11$ $= 42°.49'.6'',25$. Voici maintenant le calcul de la longitude de ce lieu.

Calcul de la longitude absolue de Porto-Ferraïo.

(2e formule (C) n° 5).

1er terme.		2e terme.	
$\log R'' = 5,3144251$		$\log \frac{1}{3} = 9,52288$	
$\log \frac{y}{r} = 8,0838262$		log. du 1er terme..	3,53287
comp. $\cos(L-\varphi) = 0,1346206$		$\log \frac{y^2}{r^2} = 6,16765$	
$+3,5328719 =$	$3410'',92$	tang$^2(L-\varphi) = 9,93391$	
	$= 56'.50'',92$	$-9,15731 =$	$-0'',14$
	$- \quad 0,14$		
Différ. des mérid., ou $P' - P =$	$56'.50'',78$.		

Mais longitude absolue de Tolare $= \quad 7°.\ 2'.33'',60$ Est,
et différence des méridiens ..... $= + \quad 56.50,78$.
Donc, longitude de Porto-Ferraïo. $= + 7°.59'.24'',38$ Est.

Ce résultat est plus grand de $4'',38$ que celui qui est inséré dans la *Connaissance des Temps*.

A la latitude de Porto-Ferraïo on a $r = 6,8037293$ et $r' = 6,8051315$; ainsi opérant comme ci-dessus, on trouvera pour la latitude de Popolonia, $42°.59'.30'',18$; pour celle de Porto-Longone, $42°.46'.2'',9$; et pour les longitudes respectives de ces deux villes (*) $8°.8'.50''23$ et $8°.3'.30'',63$, comptées du sud à l'est.

Calcul de l'azimut du côté Popolonia-Calamite *sur l'horizon*
de Popolonia.

$-7°.2'.$

25. La distance de Po[illegible] à méridienne du fanal de l'île d'Elbe est $y = 12811^m,47$, et [illegible]istance à la perpendiculaire est

(*) Le petit Fort qui nous a servi de station est le seul monument restant de l'ancienne ville de Popolonia.

$x = 19264^m$. Si donc (λ) désigne la latitude du pié de cette perpendiculaire, on trouvera, par la méthode du n° précédent, $(\lambda) = L + x = 42°.59'.30'',57$, L étant la latitude du fanal; et l'on aura ensuite

$$\log y = 4,1075990$$
$$\text{c. log } r' = 3,1948685$$
$$\log \frac{y}{r'} = 7,3024675$$

$$\log \text{tang}^2(\lambda) = 9,9390634$$
$$0,5.....$$
$$\text{tang}^2(\lambda) = 0,8690872$$
$$Q = 1,3690872$$

1er terme de la correction.

$$\log R'' = 5,3144251$$
$$\log \frac{y}{r'} = 7,3024675$$
$$\log.\text{ tang}(\lambda) = 9,9695317$$
$$-2,5864243 = -385'',86 = -6'.25'',85$$

2e terme.

$$\log \frac{1}{3} = 9,52288$$
$$\log.\text{ du 1er terme...} \quad 2,58642$$
$$\log \frac{y^2}{r'^2} = 4,60493$$
$$\log Q = 9,13640$$
$$+6,85063 = +0'',00071$$

On a donc

$$\left.\begin{array}{ll} 1^{er}\text{ terme} & -6'.25'',85 \\ 2^{e}\text{ terme} & +0,00 \end{array}\right\} = \begin{array}{r} 90°.\ 0'.\ 0'' \\ -\ 0\ .\ 6\ .25\ ,85 \end{array}$$
$$z' = 89°.53'.34'',15;$$

ainsi la correction d'azimut, ou l'angle de convergence des méridiens de Porto-Ferraïo et de Popolonia est $= 6'.25'',85$. Or nous avons trouvé pour l'inclinaison du côté *Popolonia-Calamite*, $15°.7'.20'',79$; donc l'azimut cherché, compté du sud à l'ouest et du méridien de Popolonia, est de $15°.7'.20'',79 + 6'.25'',85 = 15°.13'.46'',64$. Tel est le résultat auquel devrait conduire l'observation, abstraction faite de la réfraction, et si la Terre avait réellement la figure d'ailleurs quelconque de révolution.

Nous pourrions nous assurer de l'exactitude des résultats précédens, à l'aide des formules [illegible] au commencement du n° 105; mais nous nous contenterons de vérifier l'azimut z' au moyen de la formule

$$\text{tang } \frac{z'}{2} = \frac{\cos(L' + y)\ \text{tang}(\lambda)}{\sin L'}.$$

Dans le cas actuel $L' = 42°.59'.30'',18$; $(\lambda) = 42°.59'.30'',57$, et $\log y = 4,1075990$. Il faut convertir y en minutes ainsi qu'il suit:

$$\begin{aligned} \log y &= 4,1075990 \\ \text{c. } \log r' &= 3,1948685 \\ \log R'' &= 5,3144251 \\ \hline & 2,6168926 = 413'',9 \end{aligned}$$

par conséquent y réduit en minutes $= 6'.53'',9$.

Ensuite on a

$$\begin{aligned} \log.\cos(L'+y) &= 9,8633719 \\ \log.\text{ tang }(\lambda) &= 9,9695317 \\ \text{c. log. sin } L' &= 0,1662842 \\ \hline \log.\text{ tang }\tfrac{z'}{2} &= 9,9991878 = 44°.56'.47'',1; \end{aligned}$$

z' est donc, comme ci-dessus, de $89°.53'.34'',2$.

CHAPITRE IX.

Calcul des différences de niveau des points trigonométriques.

26. L'ART de déterminer les différences de niveau de plusieurs points fort éloignés les uns des autres, constitue le *nivellement géographique*; c'est de celui-ci qu'il s'agit lorsque l'on se propose de calculer les hauteurs des sommets des triangles formés dans toute l'étendue du pays levé, comme je vais le faire voir relativement à la carte de l'île d'Elbe. Quant au *nivellement topographique*, il n'en sera nullement question dans ce chapitre, parce qu'il sera l'objet du Livre V.

Les formules

$$H = K \cot\left(\delta + r - \tfrac{1}{2}C\right) \qquad (2)$$

$$H = K \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \qquad (5)$$

$$N = \tfrac{1}{2}\rho(1+n)^2 \operatorname{tang}^2(\delta - 90^\circ) \qquad (7)$$

démontrées aux art. 106 et 107, Géod. (*), sont les seules dont nous avons fait usage pour déterminer les hauteurs de nos stations à l'île d'Elbe. La (5me) suppose des observations simultanées et réciproques; les (2me) et (7me), une seule observation de distance au zénit; cette dernière [illegible] de la réfraction absolue du lieu de l'observateur au-dessus [illegible] d'ailleurs que [illegible]. Ces formules suffisent

(*) M. Lacroix, dans la 4e édition de son *Traité élémentaire de Trigonométrie*, est parvenu d'une manière fort simple à deux séries très-convergentes dont les premiers termes donneraient les mêmes valeurs numériques que les formules ci-dessus (2) et (5) : voyez sa *Note sur le Nivellement*, page 54.

presque toujours dans les triangulations primaires : celles de M. Laplace, art. 136, Géod., et n° 11, pourraient s'employer de préférence, toutes les fois qu'il faudrait déterminer des hauteurs très-élevées et peu éloignées de l'observateur.

Les distances au zénit observées entrent immédiatement dans le calcul de la réduction des angles à l'horizon ; mais il est nécessaire de les réduire aux sommets ou aux piés des signaux, pour calculer la formule (5) et le coefficient n de la réfraction (art. 103, Géod.). On évite des réductions trop fortes, en réduisant ces angles au point le plus près du centre du cercle répétiteur : ces réductions s'obtiennent par la formule

$$d\Delta = R'' \frac{dH \sin \Delta}{K} \text{ (page 226, Géod.)},$$

Δ étant l'angle observé, dH la hauteur du signal au-dessus de l'instrument, ou la distance verticale de ce point au pié du signal, K la ligne géodésique comprise entre les deux stations dont on cherche la différence de hauteur et réduite au niveau de la mer. La valeur de $d\Delta$ est additive ou soustractive, selon que l'on réduit Δ au sommet ou au pied du signal, c'est-à-dire que l'on a

au sommet du signal, $\delta = \Delta + d\Delta$

au pié du signal, $\delta = \Delta - d\Delta$.

On ne peut pas toujours mesurer dH directement ; mais il est facile de connaître cette hauteur par les méthodes de l'art. 104, Géod., ou par toute autre, si les circonstances l'exigent.

Déterminons maintenant la hauteur de Monte-Capane au-dessus de la mer, en prenant le fanal pour station correspondante. D'après le registre des [illegible] 18, on a

au fanal, $\Delta =$ [illegible] $-7^{\circ}.2$ [illegible] $= 7^{m},8$,

à Capane, $\Delta' = 9$ [illegible], $dH' =$ [illegible]$^{m},8$,

et pour distance du fanal à Capane, $K = 14477^{m},12$; d'où $\log K = 4,1606823$.

Réduction au sommet du Fanal.		Réduction au sommet du signal de Capane.	
$\log dH =$	0,89209	$\log dH' =$	0,94448.
l. sin $\Delta =$	9,99907	l. sin $\Delta' =$	9,99907
$\log R'' =$	5,31443	$\log R'' =$	5,31443
c. log $K =$	5,83931	c. log $K =$	5,83931
$\log d\Delta =$	2,04490 $=+$ 0°. 1′. 50″,90	$\log d\Delta' =$	2,09729 $=+$ 0°. 2′. 5″,11
$\Delta =$	86 .15 .11 ,88	$\Delta' =$	93 .44 .30
distance réduite $\delta =$	86°.17′. 2″,78	$\delta' =$	93°.46′.35″,11

Différence de niveau. (Formule (5)).

$$\log K = 4,1606823$$
$$\log.\ \text{tang}\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = 8,8160827$$
$$\log H = 2,9767650 = 947^m,91$$

hauteur du fanal au-dessus de la mer $+ 68,50$

$1016^m,41$

hauteur du signal Capane au-dessus de l'instrument..... $- 8^m,80$
hauteur de l'instrument..... $- 1$ } $- 9,80$

hauteur absolue de Capane..... $1006^m,61$.

Les angles Δ et Δ' n'ont pas été observés au même instant, mais à-peu-près dans les mêmes circonstances; ainsi le résultat précédent doit être regardé comme exact.

La hauteur de la tour de Popolonia au-dessus de la mer peut se déterminer de plusieurs manières, et entre autres à l'aide de la formule (7). Or, par une observation faite sur la tour même, la distance δ de l'horizon de la mer au zénit $= 90°.25'.6'',6$; et ce jour-là, n qui est le coefficient de la réfraction, était, à peu de chose près $= 0,08$; l'[illegible] d'ailleurs que $\log \rho = 6,80453$; on a donc

$$\log 0,5 = 9,69897$$
$$\log (1,08)^2 = 0,06685$$
$$\log \rho = 6,80453$$
$$\log.\ \text{tang}^2(\delta - 90°) = 5,72849$$
$$\log N = 2,29884 = 199^m;$$

ainsi la hauteur du centre de l'instrument au-dessus de la Méditerranée était de 199^m; et comme la hauteur du signal, à partir de ce centre, $=8^m,4$, n° 18, il s'ensuit que le sommet du même signal était élevé de $207^m,4$ au-dessus de la mer.

Si les différences de niveau devaient être déterminées dans toute la rigueur possible, et qu'elles fussent plus considérables que les précédentes, il conviendrait d'employer les logarithmes avec sept décimales, de prendre au lieu du rayon ρ de l'équateur, le rayon ρ' déterminé dans le n° 9, enfin de substituer aux formules (2), (5), (7) celles plus exactes dont elles dérivent, et d'y employer au lieu de la ligne géodésique K, la corde même de cette courbe ( ). Voyez sur cet objet, et pour ce qui concerne la réfraction, les chapitres XV et XVI du Traité de Géodésie. On y trouvera aussi des applications de la formule (2), dont M. Moynet a fait usage pour calculer les hauteurs relatives d'un grand nombre de points secondaires de la carte topographique de l'île d'Elbe. Il existe maintenant de cette île intéressante un très-beau relief exécuté par M. Clerc, et quelques vues artistement peintes par M. Morel, d'après mes dessins.

(*) Il n'est peut-être pas inutile d'observer que l'on peut rendre la formule (5) fonction des distances au zénit et du rayon de la Terre seulement : en effet, à cause de $K = 2\rho \sin\frac{1}{2}C$, ρ étant le rayon de la Terre correspondant au milieu de la corde K, et C l'amplitude de l'arc soutendu par cette corde, on a

$$H = 2\rho \sin\frac{1}{2}C \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta' - \delta).$$

Quant à la valeur de l'angle $\frac{1}{2}C$, elle est

$$\frac{C}{2} = r + \frac{1}{2}(\delta + \delta' - 2\gamma). \quad \text{(page 225, Géod.)}$$

Si on négligeait la réfraction r, on aurait, mais d'une manière un peu moins exacte,

$$H = -2\rho \cos\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta);$$

formule qui trouve naturellement son application dans la solution du problème de l'art. 113 (Géod.), et qui simplifie même cette solution.

LIVRE II.

ANALYSE DES PROJECTIONS DE LA SPHÈRE, ET CONSTRUCTION DES CARTES GÉOGRAPHIQUES.

Le principal objet d'une grande triangulation, est de fournir les élémens d'une carte géographique : c'est à montrer la manière d'en construire le canevas, que je vais surtout m'attacher dans ce livre. M. Lacroix a donné sur cette matière d'excellens préceptes qui se trouvent dans son *Précis Astronomique* servant d'introduction à la *Géographie* de M. Pinkerton; ouvrage que je me suis plu à consulter, et qui m'a fait naître le desir de retrouver, à l'aide de l'analyse élémentaire, diverses propriétés des projections énoncées par ce savant auteur. La simplicité des résultats que j'ai obtenus à cet égard, m'engage à faire connaître les constructions déduites de mes formules. Par ce moyen la théorie des n°s 42 et suivans du Traité de Géodésie se trouvera complétée.

CHAPITRE PREMIER.

Recherche des propriétés des projections stéréographique et orthographique des cercles de la sphère.

Notions générales sur les projections.

27. Si les globes de grandes dimensions étaient faciles à construire et à transporter, et qu'il fût possible de les consulter aisément, ils formeraient sans doute les meilleures représentations de la Terre; parce que les configurations des différentes parties de sa surface conserveraient sur ces globes leurs rapports de grandeur et de situation. Le relief des hautes montagnes et les autres accidens du terrain pourraient en outre y être rendus sensibles; mais jusqu'à présent de pareils détails n'ont été exprimés que sur des reliefs d'une très-petite région, construits même sur une grande échelle. Obligé par conséquent de renoncer à l'usage fréquent des globes, on a imaginé de représenter sur une surface plane la situation respective des divers lieux de la terre, et l'on est même parvenu au point de figurer avec exactitude toutes les parties des contrées de peu d'étendue. C'est en cela que consiste la *méthode des projections géographiques.*

Parmi les surfaces courbes, celles des cônes et des cylindres sont développables, c'est-à-dire, peuvent s'étendre sur un plan sans qu'il en résulte déchirure ni duplicature; mais le contraire a lieu relativement aux surfaces de la sphère et des sphéroïdes. Ainsi pour le globe on est contraint d'altérer sur un plan certains rapports de grandeur plutôt que d'autres, selon le besoin, ou bien de représenter tous ces rapports par approximation.

On ne considère, à proprement parler, que deux sortes de

projections; les unes, qu'on appelle *projections stéréographiques*, sont des représentations du globe ou des parties de sa surface, soumises aux lois ordinaires de la perspective. Les autres, que l'on nomme *projections par développement*, sont en effet des espèces de développemens assortis aux rapports que l'on veut conserver ou n'altérer que le moins possible.

Concevons, par exemple, des droites menées d'un point pris dans l'espace à tous les points de la surface de la Terre considérée comme sphérique, et coupons ce système de lignes par un plan mené d'une manière quelconque; tous les points d'intersection seront sur ce plan les projections des points correspondans de la surface du globe.

Lorsque le plan de projection passe par le centre de la sphère, et que le point de vue est à l'extrémité du rayon mené perpendiculairement à ce plan, ce rayon se nomme *axe optique*. Si, au contraire, le point de vue est supposé à une distance infinie du tableau, ou pour mieux dire, si toutes les lignes projetantes lui sont perpendiculaires, alors la projection est dite *orthographique*.

La projection stéréographique a surtout été adoptée pour représenter un hémisphère tout entier. Les deux hémisphères du globe terrestre réunis composent une *Mappemonde*. Sur celle-ci l'on n'indique que les positions des lieux les plus remarquables du globe, le cours des fleuves et des principales rivières, les lacs, les plus grandes chaînes de montagnes, etc.

Quant aux autres cartes représentant une moindre étendue de pays et plus d'objets, leur construction est assujétie aux méthodes de développement, ou à la projection orthographique. Telles sont les *cartes générales* ou *géographiques* sur lesquelles sont figurées les quatre parties du monde; les *cartes particulières*, ou *chorographiques*, qui ne comprennent que les grands ou les petits Etats; enfin les *cartes topographiques*, qui présentent tous les détails du terrain.

Pour projeter un hémisphère en totalité ou en partie, d'après la première loi que l'on vient d'énoncer, on peut supposer, 1°. l'œil à l'un des pôles de la Terre; 2°. sur l'équateur; 3°. entre le pôle et l'équateur; 4°. enfin, au centre même de la Terre. Dans le premier cas, la projection est dite *polaire* ou *équato-*

riale; dans le second cas, on la nomme *projection sur le méridien*; dans le troisième, on l'appelle *projection horizontale*; et dans le quatrième, on la nomme *projection centrale*.

De la projection stéréographique, l'œil étant à un point quelconque de l'axe des z.

g. 6. (cod.) 28. L'équation de la sphère est, en plaçant l'origine des coordonnées au centre,

$$x^2+y^2+z^2=r^2;$$

celle d'un plan est

$$z=Ax+By+D.$$

De plus, les deux projections verticale et orthographique de la génératrice du cône optique sont en général

$$y-b=n(z-c), \qquad x-a=m(z-c);$$

mais comme dans le cas que l'on considère maintenant, le sommet S du cône a pour coordonnées $a=0$, $b=0$ et $-c$, on a simplement

$$y=n(z+c), \qquad x=m(z+c);$$

ainsi l'équation du plan qui coupe la sphère devient

$$z=Am(z+c)+Bn(z+c)+D,$$

et l'on trouve aisément que

$$x=\frac{m(D+c)}{1-Am-Bn}, \quad y=\frac{n(D+c)}{1-Am-Bn}, \quad z=\frac{Amc+Bnc+D}{1-Am-Bn}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de la sphère, et éliminant m et n, on a enfin

$$x^2+y^2+\frac{(Acx+Bcy+D(z+c))^2}{(D+c)^2}=\frac{r^2(z+c-Ax-By)^2}{(D+c)^2}. \qquad (M).$$

Telle est l'équation de la surface conique qui a pour base un cercle quelconque de la sphère.

L'œil étant sur la surface de la sphère.

29. En faisant $c=r$, on exprime analytiquement que le point de vue est à la surface de la sphère; ainsi l'équation (M) devient

$$x^2+y^2+\frac{(Arx+Bry+D(z+r))^2}{(D+r)^2}=\frac{r^2(z+r-Ax-By)^2}{(D+r)^2}\ldots(M').$$

Si l'on fait en outre dans celle-ci $z=0$, on aura l'équation de la courbe suivant laquelle la surface conique rencontre le plan des xy; savoir

$$x^2+y^2+\frac{2Ar^2x}{D+r}+\frac{2Br^2y}{D+r}=\frac{(r-D)r^2}{D+r}. \qquad (1)$$

Il résulte de là que les projections stéréographiques des cercles de la sphère, l'œil étant à sa surface, sont elles-mêmes des cercles; propriété connue dès le temps de Ptolémée. (*Ptolemœi Planisphærium*, etc... 1558.)

L'équation des projections des parallèles perpendiculaires au plan xz, résulte de la précédente, en y faisant $B=0$; parce que dans ce cas celle de la base du cône est seulement $z=Ax+D$: on a donc

$$x^2+y^2+\frac{2Ar^2x}{D+r}=\left(\frac{r-D}{D+r}\right)r^2. \qquad (2)$$

On peut donner à cette expression une forme plus simple; car si on désigne d'abord par ρ le rayon de la projection stéréographique d'un parallèle, et par α l'abscisse du centre de cette projection; qu'ensuite l'on fasse $y=0$, dans l'équation (2), et que l'on en représente les racines par x', x'', on obtiendra en dernière analyse

$$x^2+y^2-2\alpha x=\rho^2-\alpha^2. \qquad (2')$$

Soit h la hauteur du pôle, et L' la latitude du point N' par lequel passe le parallèle, on a (page 54, Géod.)

$$\alpha=\frac{\cos h}{2\sin\left(\frac{L'+h}{2}\right)\cos\left(\frac{L'-h}{2}\right)};\quad \rho=\frac{\cos L'}{2\sin\left(\frac{L'+h}{2}\right)\cos\left(\frac{L'-h}{2}\right)},$$

et par suite ce rapport très-simple,

$$\frac{\alpha}{\rho} = \frac{\cos h}{\cos L};$$

c'est-à-dire que l'abscisse du centre de la projection stéréographique d'un parallèle est à son rayon, comme le cosinus de la hauteur du pôle est au cosinus de la latitude de ce parallèle.

Quant aux grands cercles de la sphère, leur plan a pour équation $z = Ax + By$; ainsi celle (1) devient, à cause de $D = 0$, dans le cas actuel, et en y faisant d'ailleurs $r = 1$, pour abréger,

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By = 1.$$

Si dans cette équation, qui est celle de la projection d'un grand cercle, on fait $(x_1 - A) = x$, $(y_1 - B) = y$, pour faire disparaître les premières puissances des variables, on aura

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 + A^2 + B^2. \qquad (3)$$

Les coordonnées du centre de cette projection sont donc A et B. De plus, si l'on désigne par φ l'angle que la trace horizontale du plan de ce grand cercle fait avec l'axe des x, on aura, abstraction faite des signes; (art. 44, Géod.)

$$A = \operatorname{tang} h, \qquad B = \frac{\operatorname{tang} h}{\operatorname{tang} \varphi} = \frac{\operatorname{séc} h}{\operatorname{tang} p},$$

et le rayon de cette même projection

$$R = \sqrt{1 + A^2 + B^2} = \frac{\operatorname{séc} h}{\sin p},$$

p exprimant en outre la longitude du méridien que l'on considère, ou l'angle qu'il fait avec le plan xz.

Il résulte de là que les centres des méridiens de la carte sont tous sur une même droite perpendiculaire à l'axe des x, puisque l'ordonnée B d'un de ces points est seule variable. On verra bientôt comment on obtient la trace horizontale d'un méridien quelconque.

La distance AC (fig. 8, Géod.) du centre de la carte au centre de la projection d'un méridien est

$$AC = \frac{\operatorname{tang} h}{\sin \varphi};$$

cela est une suite de la propriété du triangle rectangle ADC.

Pour avoir les projections p et p' des pôles P, P' (fig. 7, Géod.), il ne s'agit que de connaître les distances Ap, Ap'. Or en prenant le rayon de la sphère pour celui des tables, il est visible que ces distances sont respectivement les tangentes des angles NSP, NSP', et que parconséquent

$$Ap = \text{tang}\left(50^{gr} - \frac{h}{2}\right), \qquad Ap' = \text{tang}\left(50^{gr} + \frac{h}{2}\right);$$

de là

$$\overline{pp'} = \text{tang}\left(50 - \frac{h}{2}\right) + \text{tang}\left(50 + \frac{h}{2}\right).$$

Mais l'on peut donner à cette expression une forme très-simple; en effet,

$$\text{tang}\left(50 \pm \frac{h}{2}\right) = \frac{1 \pm \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\cos \frac{1}{2}h}}{1 \mp \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\cos \frac{1}{2}h}} = \frac{\cos \frac{1}{2}h \pm \sin \frac{1}{2}h}{\cos \frac{1}{2}h \mp \sin \frac{1}{2}h};$$

multipliant haut et bas par le numérateur, on a

$$\text{tang}\left(50 \pm \frac{h}{2}\right) = \frac{1 \pm \sin h}{\cos h};$$

donc la valeur de $\overline{pp'}$ se réduit à

$$pp' = 2 \text{ séc } h.$$

Les formules précédentes se modifient lorsque l'on projette les cercles de la sphère sur un méridien ou sur l'équateur; car dans le premier cas l'on a $h = o$, et les valeurs de α et ρ deviennent

PIC. 6. (Géod.)

$$\alpha = \frac{1}{2 \sin \frac{L'}{2} \cos \frac{L'}{2}} = \frac{1}{\sin L'} = \text{coséc } L'$$

$$\rho = \frac{\cos L'}{2 \sin \frac{L'}{2} \cos \frac{L'}{2}} = \frac{\cos L'}{\sin L'} = \cot L' = \text{tangente distance au pôle;}$$

de là

$$\alpha + \rho = An'' = \cot \frac{L'}{2}, \qquad \alpha - \rho = An' = \text{tang} \frac{L'}{2};$$

Voilà tout ce qui concerne les parallèles; quant aux méridiens, leur rayon

$$R = \frac{\text{séc}\, h}{\sin p} = \frac{1}{\sin p} = \text{coséc}\, p = \text{séc}\, p',$$

et les coordonnées de leur centre sont

$$A = 0, \quad B = \cot p = \text{tang}\, p',$$

p' étant la longitude comptée du méridien sur lequel on projette. Lorsque $p' = 0$, on a $\text{séc}\, p' = 1$, c'est-à-dire que dans cette circonstance le rayon de projection du premier méridien est égal au rayon de la sphère, ce qui est d'ailleurs évident.

Dans le cas où $h = 100^{gr}$, il s'agit de la projection équatoriale, et l'on a d'une part

$$\alpha = 0,$$
$$\rho = \frac{\cos L'}{2 \sin^2\left(\frac{L'}{2} + 50^{gr}\right)} = \frac{\cos L'}{1 + \sin L'} = \text{tang}\left(50^{gr} - \frac{L'}{2}\right),$$

de l'autre

$$A = \infty, \quad B = \infty, \quad R = \infty.$$

Ces expressions signifient que tous les méridiens de la carte se changent alors en ligne droite. De plus, la relation $\text{tang}\varphi = \text{tang}\, p \sin h$ (page 5, Géod.) se réduisant à $\text{tang}\varphi = \text{tang}\, p$, on doit en conclure que les méridiens font avec l'axe des x un angle égal à leur longitude comptée depuis cet axe : ils passent en outre par l'origine des coordonnées ou le centre de la carte, puisque dans l'hypothèse actuelle $Ap = 0$, $Ap' = \infty$.

La seule inspection de la figure 8 (Géod.) fait voir que dans le triangle CpD on a la relation $\overline{Cp}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{Dp}^2$, ou bien, en vertu de la notation adoptée,

$$R^2 - y^2 = \text{séc}^2\, h.$$

On peut découvrir une relation semblable entre le rayon d'un parallèle et la distance de son centre au point D, ou à la droite

CD qui contient les centres des projections de tous les méridiens. Pour cet effet, si l'on reprend les valeurs générales de α et ρ, et qu'on les combine entre elles, on aura

$$\alpha+\rho = \cot\left(\frac{L'+h}{2}\right), \quad \alpha-\rho = \operatorname{tang}\left(\frac{L'-h}{2}\right),$$

ou bien

$$\frac{1}{\alpha+\rho} = \operatorname{tang}\left(\frac{L'+h}{2}\right), \quad \alpha-\rho = \operatorname{tang}\left(\frac{L'-h}{2}\right).$$

Soustrayant ces deux dernières équations l'une de l'autre, et réduisant au même dénominateur, il viendra

$$\frac{1-\alpha^2+\rho^2}{\alpha+\rho} = \operatorname{tang}\left(\frac{L'+h}{2}\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{L'-h}{2}\right).$$

Mais $\operatorname{tang}\left(\frac{L'\pm h}{2}\right) = \frac{\sin L' \pm \sin h}{\cos L' + \cos h}$, par conséquent

$$\frac{1-\alpha^2+\rho^2}{\alpha+\rho} = \frac{2\sin h}{\cos L' + \cos h}.$$

D'un autre côté, $\cos L' + \cos h = 2\cos\left(\frac{L'+h}{2}\right)\cos\left(\frac{L'-h}{2}\right)$, donc

$$1-\alpha^2+\rho^2 = \frac{\sin h}{\sin\left(\frac{L'+h}{2}\right)\cos\left(\frac{L'-h}{2}\right)};$$

et à cause de la valeur de α ci-dessus, il s'ensuit que

$$\frac{1-\alpha^2+\rho^2}{2\alpha} = \operatorname{tang} h.$$

Maintenant, si dans cette équation on met pour α sa valeur $x' - \operatorname{tang} h$ (*), *et que l'on réduise, on obtiendra*

$$x'^2 - \rho^2 = \sec^2 h.$$

(*) Le point *B* (fig. 8, Géod.) étant sur la carte le centre d'un parallèle quelconque, et *CD* étant la ligne des centres des méridiens, on a, à cause de $AD = \operatorname{tang} h$, et de $AB = \alpha$,

$$BD = x' = \alpha + \operatorname{tang} h;$$

partant,

$$\alpha = x' - \operatorname{tang} h.$$

FIG. 10. Cette équation et son analogue $R^2 - y^2 = \text{séc}^2 h$ conduisent à une propriété très-remarquable. En effet, si B et C sont respectivement sur la carte les centres du parallèle RR' et du méridien MM', p étant le pôle, on aura, en vertu des relations précédentes,

$$\overline{CM'}^2 = R^2 = y^2 + \text{séc}^2 h, \quad \overline{BM'}^2 = \rho^2 = x'^2 - \text{séc}^2 h,$$

et ajoutant, on obtiendra

$$R^2 + \rho^2 = x'^2 + y^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{CB}^2.$$

Donc le triangle CBM' est rectangle en M'; donc les parallèles et les méridiens forment sur la carte les mêmes angles que sur le globe. On démontre aisément, par la Géométrie élémentaire, que, dans la projection de Ptolémée que nous analysons maintenant, cette propriété n'est qu'un cas particulier d'une autre plus générale. Nous aurons occasion de revenir sur cet objet.

Le point de vue étant au centre de la sphère.

30. Pour trouver les formules relatives à la projection centrale, soit fait dans l'équation (M) n° 28, $c = 0$ et $z = r$, on aura

$$x^2 + y^2 + r^2 = \frac{r^2}{D^2}(r - Ax - By)^2 \ldots\ldots\ldots (4);$$

c'est la projection stéréographique d'un cercle quelconque sur un plan tangent à la sphère et par conséquent perpendiculaire à l'axe optique.

FIG. 11. Présentons maintenant cette équation en fonction de la hauteur du pôle et de la latitude d'un parallèle quelconque; et pour simplifier les calculs, supposons, ce qui est permis, que l'axe de la Terre PP' soit dans le plan même des xz. Dans ce cas, le plan d'un parallèle lui sera perpendiculaire; ainsi l'on aura pour équation de sa trace horizontale RM,

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B}.$$

dans laquelle

$$-\frac{A}{B}=\infty, \quad B=0;$$

et pour celle de sa trace verticale RN',

$$z=Ax+D.$$

Dans ces équations, A est la tangente trigonométrique de l'angle $N'RX$; par conséquent $A=-\cot h$; et à cause du triangle rectangle AOn', on a évidemment $AO=r\cos\theta$, en dénotant par θ l'arc Pn' ou le complément de la latitude L' du point N'. D'un autre côté, $AR=-\frac{D}{A}$; et puisque le triangle AOR est rectangle, on a en outre $AR=\frac{r\cos\theta}{\cos h}$; donc

$$-\frac{D}{A}=\frac{r\cos\theta}{\cos h};$$

donc

$$D=\frac{r\cos\theta\cot h}{\cos h}=\frac{r\cos\theta}{\sin h}.$$

Cela posé, si l'on substitue dans l'équation (4) pour A, B et D leurs valeurs, on aura

$$x^2+y^2+r^2=\frac{\sin^2 h}{\cos^2\theta}(r+\cot h.x)^2;$$

développant et chassant le dénominateur, on obtiendra

$$x^2\cos^2\theta+y^2\cos^2\theta+r^2\cos^2\theta=r^2\sin^2 h+2rx\sin^2 h\cot h+x^2\sin^2 h\cot^2 h;$$

puis faisant passer tous les termes dans un même membre, changeant tous les signes et divisant par $\sin^2 h$, on trouvera enfin

$$x^2(\cot^2 h-\cos^2\theta\operatorname{coséc}^2 h)-y^2.\cos^2\theta\operatorname{coséc}^2 h+2rx.\cot h-r^2\cos^2\theta\operatorname{coséc}^2 h+r^2=0\ldots(4')$$

Les projections des parallèles sur un horizon quelconque se déterminent par le moyen de cette dernière équation, qui, selon que le premier terme est positif, négatif ou nul, appartient à l'hyperbole, à l'ellipse ou à la parabole.

Si l'on fait $\theta=1^g$, l'équation dont il s'agit se réduira à

$$\cot h.x+r=0.$$

Telle est l'équation de la projection de l'équateur.

Dans la supposition que le coefficient de x^2 est nul, on a

$$\cot^2 h - \cos^2\theta \operatorname{cosec}^2 h = 0,$$

d'où l'on tire aisément

$$\cos h = \cos\theta, \quad \text{ou} \quad h = \theta.$$

Concluons de là que le parallèle d'un lieu dont le complément de la latitude égale la hauteur du pôle est représenté par une parabole sur le plan de projection.

L'équation (4'), lorsqu'on y fait $y = 0$, donne les abscisses des points où les projections des parallèles coupent l'axe des x. On pourrait croire d'abord que les valeurs de x tirées de cette équation sont très-compliquées; cependant avec un peu d'attention on verra que ces valeurs sont susceptibles d'une expression fort simple. En effet, la supposition de $y = 0$ donne, après avoir converti les coefficiens en sinus et cosinus,

$$(\cos^2 h - \cos^2\theta).x^2 + 2r \sin h \cos h . x + r^2(\sin^2 h - \cos^2\theta) = 0,$$

et par suite

$$x^2 - \frac{2r \sin 2h . x}{\sin(h+\theta)\sin(h-\theta)} + \frac{r^2 \cos(h+\theta)\cos(h-\theta)}{\sin(h+\theta)\sin(h-\theta)} = 0,$$

équation dont les racines sont

$$x_1 = \cot(h+\theta)r; \qquad x_2 = \cot(h-\theta)r.$$

Le lieu des méridiens de la carte est donné de même par la formule (4); mais pour ce cas l'on a nécessairement $D = 0$, et partant

$$r - Ax - By = 0. \qquad (5)$$

On particularisera la projection du méridien que l'on a en vue de représenter, en introduisant dans son équation l'expression de l'angle que le plan de ce méridien fait avec celui des xz. Or le cosinus de cet angle est

$$\frac{-B}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} = \cos p = \text{cos. longitude.}$$

Ici A est constant, et c'est maintenant la tangente de la lati-

tude du lieu placé au centre de l'horizon, ou, si l'on veut, la tangente de la hauteur du pôle ; puisque la trace verticale AP du plan d'un méridien quelconque est $z = Ax$. Pour la quantité p, elle varie d'un méridien à l'autre : on a donc

$$B^2 = \cos^2 p\,(1 + A^2) + \cos^2 p . B^2,$$

d'où

$$B = \pm \frac{\cot p}{\cos h}.$$

D'après cela, l'équation $r - Ax - By = 0$ devient

$$r - \operatorname{tang} h . x - \frac{\cot p}{\cos h} y = 0.$$

Ainsi toutes les droites qui représentent les méridiens dans la projection sur l'horizon, se coupent au même point et sur l'axe des x, à une distance de l'origine ou du centre de la carte $= x = \frac{r}{\operatorname{tang} h}$.

Lorsque $p = 0$, on a $\cot p = \infty$; alors il reste de l'équation précédente

$$\frac{\cot p}{\cos h} y = 0, \qquad \text{ou} \qquad y = 0.$$

C'est le lieu de la projection du premier méridien de la carte. Cette projection coïncide donc avec l'axe des x, ce qui est d'ailleurs de toute évidence.

Les formules précédentes acquièrent une nouvelle forme lorsque $h = 0$ ou $h = 1^q$. Dans le premier cas, qui se rapporte à la projection sur un méridien, l'équation (4) devient, à cause de $\cot h = \infty$ et de $\operatorname{cosec}^2 h = 1 + \cot^2 h$,

$$x^2 \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 v}\right) - y^2 - r^2 = 0,$$

ou bien

$$\operatorname{tang}^2 \theta . x^2 - y^2 = r^2.$$

Les parallèles à l'équateur sont donc des hyperboles dont les branches sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ; puisque l'ordonnée y n'entre ici qu'à la seconde puissance et qu'elle est perpendiculaire à l'axe des x. Les sommets de ces courbes s'ob-

tiennent en faisant dans ce résultat $y = 0$, et l'on a

$$x = \pm \frac{r}{\text{tang } \theta}.$$

On détermine la projection de l'équateur en faisant dans ce même résultat $\theta = 1^g$; alors il reste $\text{tang}^2 \theta . x^2 = 0$; quelle que soit donc y, on a

$$x = 0;$$

ainsi la projection de l'équateur est perpendiculaire à celle du premier méridien, et coïncide avec l'axe des y.

Les projections des méridiens s'obtiennent avec non moins de facilité. Pour cela, on fait $A = 0$ dans l'équation (5), et l'on a simplement, en faisant attention que $B = \cot p$,

$$y = -r \text{ tang} p.$$

Quelle que soit x, la valeur de y est donc constante pour un même méridien. Il suit de là que les projections des méridiens sont toutes des droites parallèles aux x, ou, ce qui revient au même, perpendiculaires à la projection de l'équateur.

Le cas où $h = 1^g$ convient à la projection équatoriale. Cette circonstance réduit l'équation (4') à

$$x^2 + y^2 = r^2 \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) = r^2 \text{ tang}^2 \theta.$$

Les projections des parallèles sont donc des cercles dont le rayon $= r \text{ tang } \theta$; et si l'on faisait ici $\theta = 100^{gr}$, ce rayon serait infini: on ne peut donc pas, dans le cas actuel, représenter l'équateur. On voit par là pourquoi il est impossible de figurer un hémisphère entier dans la projection centrale.

Il nous reste à déterminer, dans la même hypothèse, les projections des méridiens. Or c'est à quoi nous parviendrons en faisant $A = B = \infty$ dans l'équation (5), ce qui la réduit à

$$Ax + By = 0.$$

Mais en général $A = \frac{\sin h}{\cos h}$, $B = \frac{\cot p}{\cos h}$; donc dans le cas dont il s'agit,

$$y = -x \sin h \text{ tang} p.$$

Ainsi les projections des méridiens sont des droites passant par l'origine des coordonnées ou par la projection du pôle. On voit en outre que l'axe des x est le premier méridien de la carte.

Si au lieu de supposer le *Tableau* tangent à la sphère, on le faisait passer par le centre ou par l'origine des axes, ce qui est le cas que l'on considère en Gnomonique, toutes les formules précédentes, modifiées convenablement, se rapporteraient au cadran horizontal; et l'on en déduirait aisément les équations des lignes horaires ou des projections des méridiens; celles des courbes de déclinaisons du soleil, etc.; par suite même, toutes les équations relatives aux cadrans verticaux inclinés, déclinans, etc., et, ce qui est fort remarquable, tant les procédés graphiques que les formules trigonométriques employées ordinairement en pareille circonstance. Ces diverses recherches peuvent exercer utilement la sagacité des jeunes lecteurs.

De la projection orthographique.

31. Les lignes projetantes, au lieu de concourir à un point déterminé, comme dans les projections précédentes, sont maintenant parallèles entre elles et perpendiculaires au tableau respectif, ou ce qui est de même, le point de vue et le tableau sont supposés à une distance infinie l'un de l'autre. C'est à ce cas particulier de la projection stéréographique que l'on a donné le nom de *projection orthographique*, ainsi que nous l'avons déjà observé. Ces lignes projetantes menées par tous les points d'une courbe quelconque, forment donc par leur ensemble une surface cylindrique dont l'intersection avec l'un des plans de projection est, sur ce plan, l'image de cette même courbe. En vertu de cette loi, l'équation de projection d'un cercle de la sphère résulte de l'équation (M) n° 28, dans laquelle $c=\infty$; ainsi l'on a

$$x^2+y^2+(Ax+By+D)^2=r^2, \qquad (6)$$

ou si l'on voulait, pour plus de symétrie,

$$x^2+y^2+\left(\frac{d-ax-by}{c}\right)^2=r^2,$$

en prenant $ax+by+cz=d$ pour l'équation du plan d'un cercle

de la sphère. Il est facile de s'assurer que les projections verticales de ce cercle seraient de même

$$x^2 + z^2 + \left(\frac{d - ax - cz}{b}\right)^2 = r^2$$

$$y^2 + z^2 + \left(\frac{d - by - cz}{a}\right)^2 = r^2.$$

Ces équations appartiennent en général à des ellipses: elles donnent des cercles lorsque le plan sécant est parallèle à l'un des plans de projection, pourvu toutefois que la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur ce plan soit moindre que le rayon de cette sphère.

Ne voulant traiter que le cas le plus général de la projection orthographique, vu son peu d'utilité en géographie, nous allons examiner les formes diverses que prend l'équation (6) dans la projection sur l'horizon. D'abord cette équation donne la projection d'un parallèle, en y faisant, comme dans le n° 30, $A = -\cot h$, $B = 0$, $D = \frac{r \cos \theta}{\sin h}$, l'axe de la terre étant alors supposé dans le plan xz; de sorte que l'on a

$$y^2 + (1 + \cot^2 h)\, x^2 - 2r \frac{\cos \theta \cot h}{\sin h} \cdot x + r^2 \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 h)}{\sin^2 h} = 0. \qquad (7)$$

Si dans cette équation l'on fait $y = 0$, il restera

$$x^2 - 2r \cos \theta \cos h \, x + r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 h) = 0.$$

Le coefficient du second terme de celle-ci est la somme des racines prises avec un signe contraire, et le dernier terme $r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 h) = r \cos (\theta + h) \cdot r \cos (\theta - h)$, est le produit de ces racines. Donc en désignant l'une par $x_{,}$, l'autre par $x_{,,}$, on aura

$$x_{,} = \cos (\theta + h) . r, \qquad x_{,,} = \cos (\theta - h) . r.$$

et l'expression du petit axe sera

$$x_{,,} - x_{,} = 2 r \sin \theta \cos h.$$

Quant au demi-grand axe de l'ellipse, on l'obtient en faisant $x = \frac{x_{,} + x_{,,}}{2}$ dans l'équation (7); et l'on trouve, après toutes les opérations convenables,

$$y = \pm r \sin \theta.$$

Pour les projections des méridiens, leur équation est

$$x^2+y^2+\left(\operatorname{tang} h.x+\frac{\operatorname{tang} h}{\operatorname{tang}\varphi}.y\right)^2=r^2;$$

c'est ce que devient l'équation (6), en y substituant pour A, B et D leurs valeurs respectives $\operatorname{tang} h$, $\frac{\operatorname{tang} h}{\operatorname{tang}\varphi}$ et $D=0$ (n° 29). Développant et ordonnant, on a

$$x^2(1+\operatorname{tang}^2 h)+y^2\left(1+\frac{\operatorname{tang}^2 h}{\operatorname{tang}^2\varphi}\right)+\frac{2\operatorname{tang}^2 h}{\operatorname{tang}\varphi}.xy=r^2.$$

Le moyen de rapporter cette courbe à ses axes principaux, est de changer la direction actuelle des coordonnées, à l'aide des formules connues, (*App. de l'Alg. à la Géom.*, par Lacroix, n° 124.)

$$x=mt-nu, \qquad y=nt+mu,$$

afin de pouvoir ensuite faire disparaître le terme en tu. On trouve d'abord

$$\left.\begin{aligned}&(m^2t^2+n^2u^2-2mntu)(1+\operatorname{tang}^2 h)\\+&(n^2t^2+m^2u^2+2mntu)\left(1+\frac{\operatorname{tang}^2 h}{\operatorname{tang}^2\varphi}\right)\\+&\frac{2\operatorname{tang}^2 h}{\operatorname{tang}\varphi}(mnt^2+m^2tu-n^2tu-mnu^2)\end{aligned}\right\}=r^2. \quad (z)$$

Achevant les opérations indiquées, ordonnant et égalant à zéro le coefficient de tu, sa valeur sera

$$\operatorname{tang}\varphi\,(m^2-n^2)-(\operatorname{tang}^2\varphi-1)\,mn=0.$$

Soit $n=\sin\beta$, $m=\cos\beta$; il vient, par la substitution de ces valeurs dans l'équation précédente,

$$\cos 2\beta-\frac{\sin 2\beta}{2}\left(\frac{\operatorname{tang}^2\varphi-1}{\operatorname{tang}\varphi}\right)=0,$$

d'où

$$\operatorname{tang} 2\beta=\frac{2\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}^2\varphi-1}=\frac{\sin 2\varphi}{-\cos 2\varphi}=-\operatorname{tang} 2\varphi,$$

et par conséquent

$$\beta=-\varphi.$$

Le grand axe de l'ellipse de projection d'un méridien coïncide donc avec la trace horizontale de ce méridien.

Le développement de la formule (z), dégagé du terme en tu est, après avoir réduit à l'aide de la relation $m^2+n^2=1$,

$$\left.\begin{aligned}&\left[1+m^2\tang^2 h+n^2\frac{\tang^2 h}{\tang^2\varphi}+\frac{2\tang^2 h}{\tang\varphi}mn\right]t^2\\+&\left[1+n^2\tang^2 h+m^2\frac{\tang^2 h}{\tang^2\varphi}-\frac{2\tang^2 h}{\tang\varphi}mn\right]u^2\end{aligned}\right\}=r^2;$$

faisant ici $t=0$ pour avoir l'expression du demi-petit axe u, il vient :

$$u=\pm\frac{r}{\sqrt{\left(1+n^2\tang^2 h+m^2\frac{\tang^2 h}{\tang^2\varphi}-\frac{2\tang^2 h}{\tang\varphi}mn\right)}};$$

mais à cause de $\beta=-\varphi$, on a $n=-\sin\varphi$, $m=\cos\varphi$; donc

$$u=\pm\frac{r}{\sqrt{1+\tang^2 h+\frac{\tang^2 h}{\tang^2\varphi}}}=\pm\frac{r}{\sqrt{1+A^2+B^2}}=\pm r\cos V,$$

V étant l'inclinaison du méridien sur le plan xy.

On déterminerait de la même manière la valeur du demi-grand axe de l'ellipse de projection, et l'on trouverait qu'elle est égale à r, comme cela est évident.

Ceux qui possèdent bien les principes de la méthode analytique dont nous venons de faire usage, pourront découvrir eux-mêmes quelques autres propriétés des projections, et parvenir, par des transformations heureuses, à des formules que l'on puisse ensuite employer aisément pour résoudre divers problèmes relatifs à la Géographie.

Plusieurs géomètres célèbres se sont occupés des deux espèces de projections qui font le sujet de ce livre; c'est ce que l'on peut voir dans les *Mémoires de l'Académie de Pétersbourg*, tome I, première partie; dans ceux de *l'Académie de Berlin*, année 1779; et dans le tome V des *Mémoires de l'Institut de France*.

CHAPITRE II.

Application de la théorie précédente au tracé des Mappemondes.

Tracé de la projection polaire.

32. En supposant l'œil à l'un des pôles, le tableau sera le plan même de l'équateur, les projections des méridiens seront des droites, et les projections des cercles parallèles à l'équateur, situés dans l'hémisphère opposé au point de vue, seront des cercles concentriques.

Projection des méridiens. Soit AP le rayon représentatif de la sphère terrestre, et $ABCD$ un des grands cercles de cette sphère. Le centre P étant pris pour la projection de l'axe optique ou du point de vue placé au pôle, la circonférence $ABCD$ sera la projection de l'équateur. Or comme les plans des méridiens se coupent tous suivant l'axe de la Terre, qui est perpendiculaire à $ABCD$, la projection du premier méridien, le méridien de Paris, par exemple, pourra être représenté par le diamètre AB. Fig. 12.

Maintenant, si on divise la demi-circonférence ACB en vingt parties égales, et que par tous les points de division l'on mène des diamètres (1)(30), (2)(40)...., ils seront les projections des méridiens correspondans aux longitudes $A(1)$, $A(2)$... La différence de longitude de deux méridiens consécutifs sur la carte sera donc de 10 grades; puisque l'arc AC, qui est le quadrant $= 100^{gr}$, est divisé en dix parties égales.

PROJECTION DES PARALLÈLES. Pour avoir les projections des parallèles à l'équateur, espacés de 10 grades en 10 grades, on élèvera le diamètre CD perpendiculaire à AB, et l'on tirera les droites $D(1)$, $D(2)$, $D(3)$... qui couperont respectivement AB aux points d', d'', d'''.... Puis du point P, comme centre commun, et avec les rayons Pd', Pd'', Pd'''..., on décrira des cercles qui seront les projections cherchées. On voit bien que D est pris pour le point de vue, et que les points d', d'', d'''... sont les projections stéréographiques des points correspondans (1), (2), (3)... appartenant aux parallèles des (10), (20), (30)...^{ièmes} grades; car si l'on conçoit que le cercle $ABCD$ tourne autour du diamètre AB jusqu'à ce qu'il fasse un angle droit avec le plan de la figure, le rayon PD sera perpendiculaire à ce plan, le point C sera le pôle opposé au point de vue D, et les arcs $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$... seront les latitudes respectives des parallèles à l'équateur; par conséquent les traces A, d', d''... des rayons visuels DA, $D(1)$, $D(2)$... seront, sur le plan perspectif, la représentation des points A, (1), (2), etc.

Pour déterminer par la Trigonométrie les rayons Pd', Pd'', Pd''' des projections des parallèles, en prenant AP pour unité, il faudrait faire usage des formules

$$Pd' = \text{tang}\frac{C(1)}{2} = \text{tang}\,45^{gr},\quad Pd'' = \text{tang}\frac{C(2)}{2} = \text{tang}\,40^{gr},\quad Pd''' = \text{tang}\frac{C(3)}{2} = \text{tang}\,35^{gr}.$$

En général le rayon de projection d'un parallèle $=$ tang $\frac{1}{2}$ distance au pôle $=$ tang $(50^{gr} - \frac{1}{2}$ lat. du parallèle), n° 29.

Afin de donner un exemple de cette détermination, nous observerons que comme les Tables trigonométriques ne renferment pas ordinairement les sinus et tangentes naturels, mais bien leurs logarithmes, il faut employer la formule

$$\log. Pd' = \log. \text{tang}\,45^{gr};$$

c'est-à-dire chercher d'abord le logarithme tangente 45^{gr}, lequel, d'après les nouvelles Tables de Callet ou de Borda, est égal à 9,9314989; ensuite voir à quoi ce logarithme répond dans la Table des nombres, et l'on trouvera 0,85408. Telle est la valeur de Pd' en parties du rayon AP pris pour unité. Si l'on a formé une

échelle de parties égales, et que ab, par exemple, soit égal à AP, on prendra sur cette échelle $\frac{85}{100}$ depuis le milieu de la ligne (8) (9) jusqu'à celui de la ligne xy. Cela est évident.

Voilà comment on construit la projection polaire d'un hémisphère entier : il ne s'agit plus maintenant que d'y marquer la position des lieux, d'après leur latitude et leur longitude connues; d'exprimer le contour des lacs et des mers, et de tracer le cours des fleuves, d'après de pareilles données. On reconnaît sur-le-champ que, dans cette projection, les méridiens et les parallèles se coupent à angles droits comme sur la sphère.

Tracé de la projection sur un méridien.

33. Dans la projection sur un méridien, le point de vue, toujours placé au centre de l'hémisphère opposé à celui que l'on veut représenter, est sur la circonférence de l'équateur; et la projection de cette ligne est sur une droite perpendiculaire à l'axe des pôles de la Terre.

PROJECTION DES MÉRIDIENS. Soit AB la projection de l'équateur, PP' l'axe de la Terre, et C le centre de la carte, ou la projection du point de vue sur le tableau ou méridien $APBP'$, considéré comme le premier, si l'on veut. Tous les méridiens ayant PP' pour commune section, et leurs projections étant des cercles (n° 29) dont les circonférences passent nécessairement par P et P', il s'ensuit que leurs centres sont sur la droite AB. Fig. 13.

Divisons comme précédemment l'arc AP en dix parties égales; tirons le diamètre (1)(21), et par ses extrémités menons les droites $P'(1)$, $P'(21)$ qui couperont respectivement AB, prolongé, s'il est nécessaire, aux points m' et n'; ces points seront les projections ou les perpectives des extrémités du diamètre du méridien de la carte, passant par le point dont la longitude, à l'égard du premier méridien AP', est de 10^{gr}. Si donc du milieu de $m'n'$, comme centre, et d'un rayon $= \frac{m'n'}{2}$, on décrit l'arc $Pm'P'$, on aura la projection du méridien cherché.

Effectuant la même construction pour les points de division

(2), (3)..., on aura évidemment les projections des autres méridiens; et à cause de la symétrie de la figure, ce qui sera construit dans le demi-cercle PAP' servira pour l'autre demi-cercle PBP'. Quant au méridien dont le plan est perpendiculaire au tableau APB, il y sera représenté par l'axe PP'. Si l'on trouvait quelque difficulté pour comprendre la construction actuelle, il n'y aurait qu'à concevoir, comme dans le n° précédent, que le cercle $APBP'$ tourne autour de AB pour prendre une position perpendiculaire au plan de la figure; alors le rayon CP' sera lui-même perpendiculaire à cette figure, P' représentera le point de vue, et le cercle $APBP'A$ l'équateur divisé en quarante parties égales. Or si par les points de division (1), (2)... l'on imagine les rayons visuels $P'(1)$, $P'(2)$..., leurs traces sur le tableau seront m', m''..., et elles y représenteront les projections des points correspondans des méridiens.

On peut employer aussi les formules trigonométriques données plus haut, pour déterminer sur la carte la position du centre et la grandeur du rayon de projection d'un méridien quelconque; car d'après le n° 29, on a

$$Cm' = \text{tang}\left(50^{gr} - \tfrac{1}{2}\text{longit.}\right) \quad \text{et} \quad Cn' = \text{tang}\left(50^{gr} + \tfrac{1}{2}\text{longit.}\right),$$

et enfin

$$\frac{m'n'}{2} = \text{séc. longit.};$$

ces équations sont d'ailleurs évidentes, à la seule inspection de la figure. Ainsi pour trouver Cm', on a

$$\log Cm' = \log.\ \text{tang}\,(50-5) = \log.\ \text{tang}\,45^{gr} = 9{,}9314989;$$

partant, $Cm' = 0{,}85408$, le rayon de la sphère étant toujours pris pour unité.

Une table qui donnerait les valeurs des rayons des parallèles de la carte dans la projection polaire, fournirait donc en même temps, pour la projection dont il s'agit, les distances Cm', Cm'', etc.

Le rayon des méridiens, qui est égal à $\frac{m'n'}{2}$, a par conséquent

pour logarithme

$$\text{log. séc. longit.} = \text{log. séc. } 10^{gr} = 0{,}0053801;$$

ainsi le rayon cherché $= 1{,}0125$.

Les logarithmes sécantes se trouvent dans les Tables de Borda; mais ils ne sont point insérés dans celles de Callet: si l'on se sert alors de ces dernières Tables, il faudra, pour avoir les logarithmes sécantes, prendre le complément arithmétique des cosinus, et cela, à cause de $\frac{1}{\cos A} = \text{séc } A$.

Pour peu que le rayon AC soit grand, ceux des méridiens croîtront rapidement, à mesure qu'ils s'approcheront de l'axe PP', et près de là il serait même très-incommode de les décrire avec un compas, quelque grand qu'il fût, puisque les centres des méridiens pourront être très-éloignés du centre de la carte. Ce qu'il y a de mieux à faire dans ce cas, c'est de décrire les arcs $Pm'P'$, à l'aide de deux règles $A'C'$, $C'B'$ unies en C' par une charnière qui leur permet de former un angle quelconque. Voici comment on se sert de cet instrument.

On place un crayon au centre C' du mouvement des deux règles $A'C'$, $C'B'$ (Ce crayon peut, étant bien arrondi, servir d'axe.); on fait coïncider le point C' avec le point m'; après avoir bien étendu et fixé la carte sur une table unie, on fixe aux points P, P' deux petites pointes de métal contre lesquelles on applique les bords des règles $A'C'$, $C'B'$, le point C' étant toujours sur le point m'; puis, sans faire varier l'angle $A'C'B'$, on fait mouvoir l'instrument de manière que les règles s'appuient sans cesse contre les pointes P, P'. Alors le crayon C' décrit l'arc de cercle $Pm'P'$, ainsi qu'il résulte des principes de Géométrie élémentaire. On peut aussi décrire cet arc par points, comme nous l'enseignerons dans l'un des numéros suivans.

Projection des parallèles. Occupons-nous maintenant de la projection des parallèles à l'équateur. Ces courbes circulaires devant passer par les points de division correspondans (1)(19), (2)(18), (3)(17)..., et leurs centres étant nécessairement situés sur le prolongement de l'axe PP', on déterminera, par exemple, le centre de la projection du parallèle (9)(11) ainsi qu'il suit:

On mènera les droites $B(9)$, $B(11)$; la première coupera PP' au point r', la seconde au point r, et rr' sera le diamètre du parallèle : d'ailleurs, puisque les trois points (9), r', (11) sont sur le parallèle (9)(11), on a tout ce qu'il faut pour le décrire. Ainsi du milieu de rr', comme centre, et d'un rayon $= o(9)$, on décrira l'arc $(9)r'(11)$ qui sera, sur la carte, le parallèle passant par la latitude de 90^{gr}. On effectuera la même construction pour tous les autres parallèles; mais lorsque leurs rayons seront trop grands, l'on emploiera à cet effet l'instrument décrit ci-dessus.

Il résulte du n° 29, que le rayon or' d'un parallèle est, dans cette projection, égal à cot. lat. de ce parallèle; que la distance Co = cosec. lat., et que Cr' = tang $\frac{1}{2}$ lat.; on aura donc, soit par une opération graphique, soit par le calcul, la graduation du méridien du milieu de la carte et celle de l'équateur.

Tracé de la projection horizontale.

34. C'est l'horizon rationnel qui sert maintenant de plan de projection : alors le point de vue est le pôle de cet horizon, et le méridien qui passe par ce lieu est une ligne droite; celui-ci se nomme ordinairement *méridien principal*.

14. PROJECTION DES MÉRIDIENS. Soit $ADBE$ l'horizon d'un lieu, son centre C sera la projection du point de vue ou du pôle de cet horizon. Soit en outre AB le diamètre qui représente le méridien du milieu de la carte. Si l'angle PCA est égal à la hauteur du pôle, et que DE soit perpendiculaire à AB, la droite PE coupera AB en un point p qui sera la projection du pôle supérieur. Si l'on tire de même EP' prolongé jusques en p', ce point sera la projection du pôle inférieur. Les projections des méridiens, qui passeront toutes par les points p, p', auront en même temps leurs centres sur la droite SS' perpendiculaire sur le milieu de pp' (n° 29); et il est remarquable que $CF = AT$ = tang. de la hauteur du pôle.

Afin de se rendre raison de cette construction, l'on imaginera, comme dans les n^{os} précédens, que le cercle $ADBE$ tournant autour de AB affecte la position perpendiculaire à celle qu'il avait primitivement. Dans cet état, PP' représentera l'axe de la

Terre, le rayon CE sera perpendiculaire au plan de la figure, et le point E, considéré comme le point de vue, sera projeté en C; de plus, les rayons visuels EP, EP' rencontreront le tableau perspectif en p, p'.

Pour achever de déterminer les projections dont il s'agit, il suffit d'en trouver un troisième point. Or le méridien dont le plan est perpendiculaire au méridien principal AB, coupe l'horizon suivant la droite DE perpendiculaire à AB; donc si du point F, comme centre, et d'un rayon FD, on décrit l'arc DpE; cet arc sera la projection du méridien passant par la longitude de 100^{gr}, comptée depuis le méridien principal AB.

La ligne SS' perpendiculaire à AB et passant par F, milieu de pp', se nomme *ligne des centres des méridiens*.

Le tracé de la projection de l'équateur ne présente pas plus de difficultés; car si on élève le diamètre QQ' perpendiculairement à PP', ce diamètre sera celui de l'équateur, et sa projection sur la carte sera qq'. Par conséquent si du milieu qq', comme centre, et d'un rayon $=\frac{qq'}{2}$, ou $=$ cosécante lat. du centre de la carte, n° 29, on décrit l'arc DqE, ce sera la projection de la moitié de l'équateur.

Voici maintenant le moyen de trouver le centre d'un méridien quelconque, déduit d'une propriété remarquable de la projection stéréographique. On sait par le n° 29, que si x' est le centre d'un des méridiens de la carte, on a $pF =$ séc. lat., et $Fx' = \frac{\text{séc. lat.}}{\text{tang. long.}}$; la tangente de l'angle Fpx' sera donc égale à

$$\frac{Fx'}{Fp} = \frac{1}{\text{tang. long.}} = \text{cot. longit.}$$

Donc l'angle Fpx' est le complément de la longitude du méridien que l'on considère, et qui a pour rayon px'; donc l'angle formé par la projection de ce méridien et par celle du méridien principal AB, est égal à l'angle que ces mêmes méridiens font entre eux sur le globe; donc enfin les projections stéréographiques de deux grands cercles de la sphère font les mêmes angles que les plans de ces cercles. De là dérive naturellement cette construction. Du point p, comme centre, et d'un rayon arbitraire, d'un rayon égal à pF, par exemple, on décrira une circonférence que l'on

divisera en quarante parties égales, à partir de AB, si l'on ne veut tracer, comme précédemment, que quarante méridiens; et par tous les points de division l'on mènera des rayons dont les prolongemens rencontreront la ligne SS' des centres en différens points x', x''... qui seront les centres des projections des méridiens. Il est visible que puisque la figure est symétrique, il suffira de tirer les rayons dans le premier quart de cercle. Il arrivera cependant, dans la pratique, qu'il faudra renoncer à ce procédé, lorsque le rayon R de ces méridiens deviendra trop grand : dans ce cas, on déterminera de la manière suivante les points où les méridiens rencontrent le plan de projection.

Soit φ l'angle $m'CB$ que forme avec la droite AB l'intersection $\mu'm'$ du plan du méridien avec celui du tableau; on aura (art. 44, Géod.)

$$\text{tang}\,\varphi = \text{tang. longit.} \times \sin.\ \text{lat.} = \text{tang}\,p \times \sin L.$$

Cette formule se calcule si facilement par les logarithmes, que nous n'en ferons aucune application numérique; mais nous allons montrer comment elle donne lieu à une construction élégante.

D'un point quelconque pris sur AB ou sur son prolongement, du point F, par exemple, on abaisse une perpendiculaire Fk sur la ligne PP', faisant, comme l'on sait, un angle PCA égal à la hauteur du pôle, et l'on porte la longueur Fk de F en k'; puis de ce dernier point, comme centre, et avec un rayon $= Fk'$ ou avec tout autre rayon pris à volonté, mais un peu grand, on décrit une circonférence que l'on divise de même en quarante parties égales (*). Enfin l'on mène des sécantes $k'n'.k'n''$... par tous les points de divisions, et les extrémités n', n''... de ces sécantes terminées à la droite SS', sont sur les traces mêmes des plans des méridiens; tirant donc les droites $n'C\mu'$, $n''C\mu''$..., les diamètres $\mu'm'$, $\mu''m''$ seront les traces cherchées, et l'on aura par conséquent trois points, tels que μ', p, m', de chaque méridien de la carte; après quoi on décrira ces méridiens par l'un des procédés expliqués plus haut.

(*) On conçoit que l'on abrège beaucoup les opérations, en choisissant le rayon d'un cercle déjà divisé.

Afin de ne laisser dans l'esprit des jeunes lecteurs aucun doute sur l'exactitude de cette construction, nous allons leur démontrer que la tangente de l'angle $n'CF$ est, en effet, égale à la tangente de la longitude multipliée par le sinus de la latitude du point C, et par conséquent que l'équation précédente est satisfaite.

Le triangle CFk rectangle en k donne, à cause de CF=tang.lat.

$$Fk = \sin L \operatorname{tang} L,$$

et comme la tangente de l'angle $Fk'n' = \frac{Fn'}{Fk'}$ = tang. p, par construction, il est clair alors que le triangle $Fk'n'$ donne lui-même

$$Fn' = \operatorname{tang} p \sin L \operatorname{tang} L;$$

donc

$$\operatorname{tang} n'CF = \frac{Fn'}{CF} = \frac{\operatorname{tang} p \sin L \operatorname{tang} L}{\operatorname{tang} L} = \operatorname{tang} p \sin L = \operatorname{tang} \varphi,$$

les longitudes étant comptées du méridien principal AB.

Ceux qui connaissent les procédés de la Géométrie descriptive, reconnaîtront aussitôt que la méthode précédente en dérive; car il s'agit dans cette circonstance de trouver la trace horizontale d'un plan, lorsque la trace verticale PP'' est donnée, ainsi que l'angle que ce plan fait avec celui des xz. (Voyez sur ce point la *Géométrie descriptive* de Monge, ou le *Complém. de Géom.* de Lacroix.)

Dans le cas où l'on n'aurait pas d'espace autour de la carte pour effectuer la construction précédente, on porterait Fk de F en k'', pour avoir ce que l'on nomme le *centre diviseur* k'': du reste, la méthode est absolument la même que ci-dessus.

PROJECTION DES PARALLÈLES. Il est très-facile de décrire les parallèles à l'équateur, dans la projection qui nous occupe; car leurs plans étant perpendiculaires au méridien principal AB, on obtiendra les diamètres de leurs projections, comme pour l'équateur lui-même; c'est-à-dire qu'après avoir divisé la circonférence $ABDE$ en quarante parties égales, à partir du point P, on mènera, de deux en deux, des droites $(1)E$, $(1')E$, et l'intervalle vv', intercepté entre ces droites et pris sur le méridien AB, sera le diamètre d'un parallèle. Dans le cas présent, vv' appar-

tient évidemment au parallèle mené par la latitude de 80^{gr}, puisque l'arc AP mesure la hauteur du pôle.

Pour les parallèles qui sont très-éloignés du pôle supérieur P, la construction que nous venons d'indiquer à leur égard ne peut plus être mise en pratique; parce que le point v est alors trop loin du centre de la carte. On pourra, pour obvier à cet inconvénient, tracer les intersections des plans des parallèles avec le plan de projection $ADBE$; intersections qui sont nécessairement parallèles au diamètre DE, et distantes de lui de

$$x = \frac{\text{sin. lat. du parallèle}}{\text{cos. haut. du pôle}} \quad (\text{n° 30}).$$

Lorsque la latitude est australe, la valeur de x devient négative; ainsi, au lieu de la porter du côté de AC, on la portera du côté de CB.

Fig. 15. Il suit de là que si, à une distance x de la droite DE, on lui mène la parallèle de, les points d, e communs à cette parallèle et à la circonférence $ADBE$, appartiendront au parallèle cherché; mais ce parallèle passe en même temps par un point tel que v' déterminé ainsi qu'il a été dit précédemment; donc on a tout ce qu'il faut pour le décrire.

Enfin, si au lieu de toutes ces constructions, on voulait déterminer, par le calcul, le centre et la grandeur du rayon de la projection d'un parallèle mené par la latitude l, on aurait recours aux formules

$$\alpha = \frac{\cos h}{2\sin\left(\frac{l+h}{2}\right)\cos\left(\frac{l-h}{2}\right)}, \qquad \rho = \frac{\cos l}{2\sin\left(\frac{l+h}{2}\right)\cos\left(\frac{l-h}{2}\right)},$$

rapportées au n° 29.

Il ne faut pas oublier de prendre l négativement pour les latitudes australes. Si on voulait trouver la valeur du rayon ρ, par une opération graphique, il serait commode d'employer la formule

$$\rho = \tfrac{1}{2}\cot\left(\frac{h+l}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\tan g\left(\frac{h-l}{2}\right), \text{ (page 53, Géod.)}$$

qui a lieu pour les latitudes boréales.

35. Pour terminer ce que je me suis proposé de dire concernant la projection stéréographique de la sphère, l'œil étant supposé à l'un des points de sa surface, je vais montrer d'abord comment on peut tracer la projection de la plus courte distance entre deux points donnés sur la carte ; ensuite j'enseignerai la manière de tracer un méridien et un parallèle par un point donné.

1°. *Tracer sur une mappemonde la plus courte distance de deux points donnés.*

Si l'un des points donnés est le centre de la carte, on aura de suite la projection stéréographique de la plus courte distance, en joignant le centre et le second point donné. Cela est de toute évidence ; puisque tout grand cercle qui passe par l'axe optique, a pour projection ou perspective une ligne droite. Ainsi *Cg* est projection de la plus courte distance de *C* à *g*. Reste à savoir combien cette distance contient de grades : pour cet effet, on portera *Cg* de *C* en *g'*, et l'on mènera la droite *Eg'G* ; le nombre de grades contenus dans l'arc *DG* sera celui qu'il s'agissait de trouver, parce que *Cg'* est la projection de l'arc de grand cercle *DG*. Fig. 16.

On voit bien que l'échelle des plus courtes distances du centre de la carte à tous les autres points, doit présenter une graduation semblable à celle que l'on effectue sur l'équateur des mappemondes construites sur le plan du méridien. Mais voici la question actuelle prise dans toute sa généralité.

Soit *Z* le zénit d'un lieu, *C* le centre de l'horizon ou la projection de *Z*, et *ZMB*, *ZMB'* les verticaux respectifs des deux points *M*, *M'* donnés sur le globe par leurs longitudes et leurs latitudes. Ces points auront évidemment pour perspectives ou traces, *m*, *m'*, en supposant l'œil en *E*. Or si l'on prolonge les droites *MM'*, *mm'*, elles se rencontreront en un point quelconque *R*, et la droite *COR* sera, sur l'horizon ou plan de projection *CBB'*, la trace du plan *MCM'* du grand cercle à projeter. Donc les quatre points *m*, *m'*, *O*, *O'* seront sur la projection du grand cercle qui passe par *MM'* ; donc cette projection, qui est elle-même un cercle, sera entièrement déterminée. Fig. 17.

Cela posé, on tracera sur la carte la plus courte distance, ainsi

Fig. 18. qu'il suit. On portera Cm de C en μ, et Cm' de C en μ'; on tirera les droites $E\mu n$, $E\mu' n'$; ensuite sur mm' on construira le triangle $m'Em$ de manière que $mE' = \mu E$, et que $m'E' = \mu' E$; puis sur les prolongemens de $E'm'$ et de Em on portera respectivement μn de m en n'', et $\mu' n'$ de m' en n'''; enfin l'on cherchera la commune section R des deux droites $m'm$, $n'''n''$, et l'on mènera la droite RCO', qui sera la trace cherchée : après quoi l'on tracera l'arc de cercle $m'vm$ par la méthode ordinaire.

Fig. 17. Il n'est pas douteux que si les droites MM' et mm' étaient parallèles, la trace dont il s'agit serait aussi parallèle à mm'.

On trouvera le nombre de grades contenus dans la plus courte distance $m'vm$, en considérant la droite $n'''n'' = MM'$ (fig. 17 et 18) comme corde de la circonférence ADB. Le nombre de grades trouvé se convertira ensuite en myriamètres, à raison de dix myriamètres par grade.

Il résulte de ce qui précède, que toutes les fois que deux points donnés sur une mappemonde et son centre ne sont pas en ligne droite, on peut décrire la projection stéréographique d'un grand cercle de la sphère; si ces deux points sont les perspectives de leurs correspondans sur la circonférence de ce cercle. La Trigonométrie fournit aussi une solution de ce problème; car puisque

Fig. 17. dans le triangle sphérique ZMM' on connaît les deux côtés ZM, ZM' et l'angle compris Z ou mCm', la question est réduite à trouver le côté MM' au moyen de ces données. Mais voici une méthode tirée des principes mêmes de la *Géométrie descriptive*.

Fig. 19. Des points n, n' déterminés par la méthode précédente, abaissez sur AB les perpendiculaires nl, $n'k$; prolongez Cm de $my'' = \mu l$; prolongez de même Cm' de $m'z'' = \mu' k$. Les points y'' et z'' seront les projections orthographiques horizontales des points donnés m, m'.

Maintenant menez $z'DM$ parallèle à AB, et des points y'', z'' abaissez sur $z'DM$ les perpendiculaires $y''Y$, $z''Z$; puis faites $y'Y = nl$ et $z'Z = n'k$; les points Y, Z seront les projections orthographiques verticales des mêmes points mm'. Enfin menez la droite ZYM; menez en outre MR parallèle à DE, jusqu'à la rencontre de la droite $z''y''$, et le point R sera sur la trace du

plan du méridien dont on cherche la projection. Donc *O'CO* sera cette trace elle-même. Tel est le procédé employé en Géométrie descriptive, pour mener un plan par trois points dont on a les projections orthographiques. (Voyez la *Géométrie descriptive* de Monge, ou celle de Lacroix.)

On remarquera que l'on vient de passer de la projection stéréographique d'un point à sa projection orthographique. On a souvent besoin d'obtenir ainsi l'une par l'autre, pour résoudre des problèmes de l'espèce de ceux dont nous nous occupons en ce moment.

2°. *Par un point donné sur la carte, comme projection stéréographique d'un point du globe, mener un méridien et un parallèle.*

Le point donné *m*, le centre de la carte *C*, et la projection *p* du pôle, sont trois points qui déterminent la position du méridien dont on cherche la projection: voici le moyen de déterminer sa trace horizontale. Fig. 19.

Après avoir obtenu la ligne des centres *SS'*, on élevera une perpendiculaire sur le milieu de la corde *pm*, et cette perpendiculaire rencontrera la ligne *SS'* en un point *S'*; alors de ce point, comme centre, et d'un rayon égal à *S'p* on décrira l'arc *pm*, lequel sera la projection du méridien demandée.

Tous les parallèles de la carte ayant leurs centres sur la droite *DE*, et celui que l'on considère devant passer par le point *m*, il est clair que si l'on pouvait trouver un autre point par lequel il dût passer encore, le problème serait résolu. Pour cet effet, cherchons le point où ce parallèle coupe le méridien principal. Fig. 20.

On conçoit aisément que si l'on avait en grades la distance du point donné au pôle, et que le méridien principal *DE* fût gradué comme nous l'avons enseigné, le point pris sur ce méridien et dont la distance angulaire au pôle serait la même, appartiendrait au parallèle cherché: or, pour déterminer cette distance angulaire, on cherchera par l'une des méthodes précédentes, la corde de l'arc du méridien qui, sur le globe, joint le pôle et le point dont il s'agit. Cette corde étant trouvée, on la portera sur la circonférence *ADB*, supposée divisée, et l'on connaîtra

alors le nombre de grades de l'arc qu'elle soutend. Le reste de la construction s'effectue sans difficulté.

Ce problème se résout plus élégamment par la Géométrie descriptive : il consiste alors à trouver la trace verticale du plan du parallèle sur celui du méridien principal, connaissant et l'angle que ce parallèle fait avec le plan horizontal de projection, et les projections orthographiques du point par lequel il doit passer.

Supposons toujours, pour exemple, que le point m soit sur le parallèle en question : on cherchera, comme ci-devant, sa projection orthographique y''. De ce dernier point l'on abaissera sur DE la perpendiculaire $y''n'$, et l'on prendra $n'l' = nl$. Par le point l', projection verticale orthographique de m, on tirera la droite $(1)l'(1')$ parallèle au diamètre QQ' de l'équateur, et menant ensuite la ligne projetante $A(1)$, le point v sera en même temps sur le parallèle cherché et sur le méridien principal de la carte : élevant donc une perpendiculaire sur la corde vm, son intersection avec DE sera le centre du parallèle à décrire.

Dans cette construction l'on prend le demi-cercle DBE pour le plan vertical de projection, que l'on conçoit ensuite rabattu sur le plan horizontal ; ce qui ne change rien ni à la grandeur, ni à la position respective des lignes que ce plan vertical contient.

Tracé de la projection orthographique.

36. J'insisterai peu sur ce qui a rapport à la projection orthographique des cercles de la sphère, par la raison que j'ai donnée au n° 31. D'ailleurs ceux qui entendent bien la Géométrie des plans et des surfaces courbes, n'éprouveront aucun embarras pour résoudre toutes les questions qu'ils pourraient se proposer à ce sujet : voici la plus générale.

PROJECTION SUR L'HORIZON,

TRACÉ DES MÉRIDIENS. Dans la projection actuelle, les méridiens sont des ellipses dont les grands axes coïncident avec les traces mêmes des plans de ces méridiens. Ces traces se déterminant par la méthode exposée au n° 34, je donnerai seulement le moyen d'obtenir les petits axes.

Soit, comme précédemment, l'angle DCP égal à la hauteur du pôle; soient en outre $m''\mu''$ la trace d'un méridien, et DE la projection du méridien principal. Pour avoir la projection orthographique du pôle P élevé, on abaissera sur CD la perpendiculaire Pp, et le point p sera cette projection. Fig. 21.

Maintenant, pour avoir l'angle que le plan du méridien $\mu''pm''$ fait avec celui du tableau ou avec le plan horizontal, on abaissera du point p la droite pR perpendiculaire sur $\mu''m''$; on fera $pR'=pR$ et l'on mènera la droite $R'P$ qui formera alors avec DE l'angle cherché. En effet, d'une part $pC=\cos h$, $Pp=\sin h$; de l'autre, à cause du triangle rectangle RpC dans lequel l'angle $RCp=\varphi$, on trouve aisément que

$$pR = \sin\varphi\cos h;$$

mais le triangle PpR' rectangle en p donne

$$\text{tang } PR'p = \frac{\sin h}{\sin\varphi\cos h} = \frac{\text{tang } h}{\sin\varphi},$$

et comme d'ailleurs

$$\cos R' = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2 R'}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\text{tang}\,\varphi}{\sqrt{1+\text{tang}^2\varphi}},$$

il s'ensuit que

$$\cos R' = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\text{tang}^2 h}{\sin^2\varphi}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2 h+\dfrac{\text{tang}^2 h}{\text{tang}^2\varphi}}};$$

expression qui, d'après le n° 31, exprime le cosinus de l'angle V que le méridien fait avec l'horizon.

Il suit de là, que si l'on mène Cn parallèle à $R'P$, et du point n la droite nt parallèle à Pp; que du point C et d'un rayon $=Ct$ on décrive un arc tn' terminé à la rencontre de Cn' mené perpendiculairement à la trace ou au grand axe $\mu''m''$, la ligne Cn' sera la projection orthographique du rayon Cn, ou, ce qui est de même, le demi-petit axe demandé. La question est donc réduite à décrire une ellipse dont les axes sont donnés. Je n'indiquerai à cet effet qu'un seul procédé, pour ceux qui n'auraient que de faibles notions des lignes du second degré; le voici :

De l'extrémité n' du demi-petit axe, et avec un rayon égal au

demi-grand axe Cm'', on décrira deux petits arcs qui couperont $\mu''m''$ aux points f, f', lesquels seront les foyers de l'ellipse. Ensuite du point f, comme centre, et avec un rayon arbitraire, mais plus grand que fm'' et plus petit que $f\mu''$, on décrira deux arcs, l'un a droite, l'autre à gauche de DE; enfin, du second foyer f' et avec un rayon égal à l'excès du grand axe $\mu''m''$, sur le premier rayon choisi à volonté, on décrira des arcs dont les intersections avec les précédens seront deux points de l'ellipse à décrire. En répétant cette opération, l'on obtiendra autant de points que l'on voudra de cette courbe, et on la tracera ensuite librement à la main, ou mieux encore avec une *règle élastique*, à laquelle on donnera la courbure convenable par le moyen des vis qui y sont adaptées.

Tracé des parallèles. Supposons que l'on veuille tracer la projection du parallèle dont la distance au pôle élevé est mesurée par l'arc Pb ou Pa. Des points a, b on abaissera sur le méridien principal DE les perpendiculaires aa', bb', et la ligne $a'b'$ sera le petit axe de projection du parallèle à décrire. Comme le grand axe de cette projection est le diamètre même du parallèle, lequel est égal à $ab = 2aO$, il est clair alors qu'après avoir déterminé la projection O' de son centre, il faudra prendre sur OO', et de part et d'autre de DE, deux distances $O'H$, $O'H'$, égales chacune au rayon aO du parallèle; ainsi HH' sera le grand axe de la projection à tracer. En vertu des calculs et de la notation du n° 31, le petit axe de cette projection $= 2r \sin\theta \sin h$, et le grand axe $= 2r \sin\theta$; ces valeurs s'obtiennent d'ailleurs immédiatement par la Trigonométrie rectiligne et par cette considération, que la corde ab a pour projection, sur la droite DE, sa longueur même multipliée par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec cette droite.

Maintenant que les deux axes sont déterminés, il ne reste plus de difficulté pour tracer le parallèle. J'observerai cependant qu'au lieu de procéder comme ci-dessus pour décrire l'ellipse $Ha'H'b'$, on peut la déterminer par points, de la manière suivante. On divisera en parties égales et en nombre pair la corde ab, on cherchera sur DE les projections de tous les points de division, comme on l'a fait pour les points a, b, etc., et après avoir mené par

ces mêmes points des ordonnées dans le demi-cercle axb, on portera sur les ordonnées correspondantes de l'ellipse à tracer, les longueurs des premières; on aura par ce moyen des points de cette ellipse ou de la projection que l'on avait en vue de trouver.

37. En comparant entre elles les projections stéréographique et orthographique des cercles de la sphère, on s'apperçoit d'abord que dans la première les espaces comprenant le même nombre de grades, s'accroissent du centre à la circonférence, tandis que le contraire a lieu dans la projection orthographique. Ces deux défauts opposés peuvent être évités en grande partie, en plaçant, comme l'a proposé Lahire, le point de vue hors de la sphère et à une distance égale au sinus de 50^{gr}. Car par ce moyen l'obliquité des rayons visuels, qui tend à agrandir les espaces, devient moindre, et est à-peu-près compensée par celle des surfaces projetées, qui tend à les diminuer. Malgré les avantages que cette projection a sur celle de Ptolémée, il ne paraît pas qu'elle ait été adoptée par aucun géographe, sans doute parce que les méridiens et les parallèles y étant représentés par des ellipses, sont en général moins commodes à tracer que des arcs de cercle; mais, comme l'observe avec raison M. Lacroix (*Introduct. à la Géograp.* de Pinkerton, *page cxj*), « Le dessin de la projection est toujours pour un géographe instruit la moindre des difficultés que » présente l'exécution d'une carte. » Ceux qui voudront adopter la projection de Lahire, pourront déduire de l'équation (M) et par une analyse semblable à celle du n° 29, toutes les formules qui conviennent à cette projection. Quant aux procédés graphiques, ils dérivent essentiellement des lois de la perspective et sont analogues à ceux qui sont l'objet des numéros précédens. Il en est de même *relativement à la projection centrale* (*).

(*) On a exécuté, cette année, au Dépôt des fortifications, un mappemonde dont la projection n'est aucunement assujétie aux principes de perspective. M. Bayart, capitaine du génie, auquel est due cette nouvelle carte, a trouvé plus avantageux de diviser les deux axes et la circonférence en un même nombre de parties égales; parce que les grades, dans le sens de ces lignes, sont égaux sur la carte comme sur le globe.

CHAPITRE III.

Projections par développement, des cartes particulières.

Du développement conique.

38. La projection de Ptolémée a rarement servi de base à la construction des cartes particulières; parce que les rayons des méridiens et des parallèles auraient une longueur trop considérable, pour qu'il fût aisé de faire usage de cette projection, et que d'ailleurs les distances et les espaces n'y éprouveraient pas une altération moindre que dans d'autres projections dont le tracé est plus facile à exécuter. C'est par cette raison que les géographes préfèrent dans ce cas les *projections par développement.* Celles-ci sont de deux espèces, les unes se nomment *développemens coniques,* et les autres s'appellent *développemens cylindriques.* Nous parlerons d'abord de la première espèce, et nous ferons part des changemens importans qu'on y a faits pour la rendre même applicable aux cartes semi-topographiques.

Pour représenter sur un plan une zône sphérique d'une très-petite largeur, on peut la considérer comme se confondant sensiblement avec la surface d'un cône tronqué. Alors dans le développement de cette surface, les parallèles deviennent des cercles décrits du sommet du cône pris pour centre, et les méridiens sont des droites passant toutes par ce point. Ici se présente une question assez facile à résoudre. Le cône doit-il être tangent à la zône que l'on considère, ou lui être inscrit, ou enfin lui être en partie inscrit et circonscrit? et dans l'un de ces cas, quels sont les espaces qui éprouvent de l'extension ou de la contraction? D'abord lorsque les parallèles qui bordent la zône sont fort

près l'un de l'autre, on peut prendre le cône tangent au parallèle moyen de cette zône, et alors le développement de ce parallèle a évidemment pour rayon la cotangente *MO* de sa latitude *EM*, et pour amplitude l'arc qui est égal à la circonférence dont *MR* est le rayon. Il suit en outre de là que les parallèles de la carte, tant supérieurs qu'inférieurs au parallèle moyen, excèdent ceux du globe dont ils sont les projections. Fig. 22.

Afin de mieux fixer les idées à cet égard, soit *CP* le rayon de la sphère, *M* le lieu situé à la latitude *EM*, et *OM* la cotangente de cette latitude. Du point *O*, comme centre, et avec le rayon *OM*, on décrira un arc indéfini *NN'*, et prenant *OG* pour le méridien du milieu de la carte, on fera l'angle *NOM* égal à la moitié du nombre de grades contenus dans le parallèle moyen. Par exemple, si ce parallèle comprend 25^{gr} sur le globe, et que la différence de latitude des parallèles extrêmes soit de 30^{gr}, le parallèle moyen en aura sur la carte un nombre exprimé par

$$\frac{MR}{OM}.25^{gr}.$$

Telle est l'amplitude de cet arc. En effet, les nombres de grades contenus dans deux arcs de même longueur, sont entre eux réciproquement comme leurs rayons. Ainsi l'angle $MON = \frac{MR}{OM}.\frac{25^{gr}}{2}$; et il est évident que les projections des méridiens feront entre eux des angles moindres que sur le globe, puisque *MO* est toujours plus grand que *MR*.

Le parallèle moyen étant décrit, on prendra sur l'axe *OG* de la carte deux parties *Ma*, *Mb*, égales chacune à la moitié de la différence de latitude des parallèles extrêmes, c'est-à-dire égales à la longueur de 15^{gr}, prise sur l'échelle de cette carte. Ces parallèles seront représentés par les arcs *DD'*, *EE'*. Si l'on veut que les méridiens et les parallèles soient décrits de 5 en 5^{gr}, on partagera *NN'* en cinq parties égales, et *ab* en six parties. La plupart des cartes particulières des Empires sont construites d'après cette méthode. Je donnerai bientôt plus de détails à ce sujet, en parlant de la projection de Flamstéed.

En supposant toujours que l'arc *ab* soit petit, il n'y aurait pas

d'inconvénient à prendre sa corde pour le côté du cône tronqué
Fig. 23. à développer. Dans ce cas, les rayons des projections des parallèles extrêmes seraient respectivement AO et BO, et la carte aurait une exactitude rigoureuse sur ces parallèles; mais ceux qui seraient intermédiaires pécheraient un peu par défaut. Voici le moyen de déterminer la droite AO.

L'angle O ayant pour mesure $\left(\frac{AP'}{2}=\frac{1^q+\text{lat}A}{2}\right)-\left(\frac{BO}{2}=\frac{1^q-\text{lat}B}{2}\right)$ $=\frac{\text{lat}A+\text{lat}B}{2}$, et le triangle rectangle AOm, donnant

$1 : AO :: \sin\left(\frac{\text{lat}A+\text{lat}B}{2}\right) : \cos.\text{lat}A$, on a $AO=\frac{\cos(\text{lat}A)}{\sin\frac{1}{2}(\text{lat}A+\text{lat}B)}$.

On pourrait aussi, comme l'a proposé le géomètre anglais Murdoch, substituer au cône tangent un cône en partie inscrit et tel que son aire comprise dans la carte fût équivalente à celle de la zône sphérique qu'elle représente.

Quelques géographes, et entre autres l'astronome Delisle, prirent pour surface conique représentative d'une zône, celle qui la coupait suivant deux parallèles placés chacun à égale distance du parallèle moyen, et de l'un des deux parallèles extrêmes. Il résultait de là que les dimensions des parallèles communs à la carte et au globe, n'étaient point altérés, et que l'étendue totale de la carte différait peu de celle de la région terrestre correspondante; parce que la dilatation des parties méridionales et septentrionales se trouvait à-peu-près compensée par le rétrécissement de la partie du milieu. Sur la carte générale de l'Empire de Russie, construite de cette manière par Delisle, et embrassant une latitude de 30 degrés, le parallèle moyen répondait à 55°, et les parallèles communs avec la sphère passaient par les latitudes de 47°.30′ et 62°.30′. En vertu de la formule $OA=\frac{\cos.\text{lat}A}{\sin\frac{1}{2}(\text{lat}A+\text{lat}B)}$ trouvée ci-dessus, le rayon de la projection du plus grand de ces deux parallèles était

$$OA=\frac{\cos(47°.30')}{\sin(55°)},$$

celui de la sphère étant pris pour unité.

Mais si au lieu de la corde AB, on eût employé l'arc qu'elle

soutend, afin que les degrés de latitude sur la carte eussent été égaux à ceux du méridien de la terre supposée sphérique, on aurait eu d'abord, à cause des triangles semblables ABx, AOm,

$$OA = \frac{AB \times Am}{Ax};$$

puis, pour satisfaire à la condition énoncée,

$$OA = \frac{\text{arc } AB \times Am}{Ax} = \frac{\text{arc } AB \times \text{cos. lat} A}{\text{cos. lat} A - \text{cos. lat} B}$$

$$= \frac{\text{arc } AB \times \text{cos. lat } A}{2 \sin \frac{1}{2}(\text{lat} A + \text{lat} B) \sin \frac{1}{2}(\text{lat} B - \text{lat} A)};$$

et

$$\tfrac{1}{2} \text{arc } AB = \text{arc } (15°)$$

$$= \text{tang } 15° - \tfrac{1}{3}\text{tang}^3 15° + \tfrac{1}{5}\text{tang}^5 15° - \ldots \text{(}\textit{Géom.}\text{ de Legendre, page 355.)}$$

Le savant Euler, qui, de son côté, s'est occupé avec succès de la recherche des propriétés des projections de la sphère et de celles du développement conique précédent, s'imposa pour condition, qu'aux extrémités méridionales et septentrionales de cette dernière projection, les erreurs soient égales, chacune à la plus grande de celles qui ont lieu vers le parallèle moyen de la carte. Il trouva, en conséquence, que le centre commun des parallèles doit être extérieur à la sphère et distant du pôle de 5° de latitude; que l'angle de deux méridiens formant sur la terre un angle de 1°, est réduit sur la carte à 48′.44″; et enfin que la différence entre l'arc de grand cercle qui mesure sur le globe la plus courte distance de deux points, et la ligne droite qu'on lui substitue sur la carte, est telle, qu'un arc de 90° a sur la carte une longueur de 90°,79; quantité exacte à moins d'un centième près.

De la projection de Flamstéed.

39. Dans l'*Atlas céleste* de Flamstéed, le méridien du milieu de la carte et les parallèles sont représentés par des lignes droites. Ces parallèles, perpendiculaires au méridien dont il s'agit, sont espacés comme sur le globe, et leurs degrés décroissent aussi proportionnellement au cosinus de la latitude. Mais cette sorte

de projection, dont la figure 24 offre le modèle, quoique n'altérant point les distances mesurées dans le sens des parallèles, et jouissant de la propriété de représenter, par des quadrilatères équivalens, chaque quadrilatère correspondant formé sur la surface du globe par deux méridiens et deux parallèles quelconques, a le défaut d'altérer considérablement la configuration des parties situées vers les limites de la carte, par l'obliquité qu'y prennent les méridiens à l'égard des parallèles. Alors, pour obvier le plus qu'il est possible à cet inconvénient, on assujétit d'abord le parallèle moyen de la carte à être coupé perpendiculairement par tous les méridiens; et pour cela, il suffit de substituer un arc de cercle à la droite qui représente ce parallèle, et de prendre pour son rayon la cotangente de sa latitude (*); ensuite on rend tous les autres parallèles concentriques à celui-là. Cette modification faite à la projection de Flamstéed établit, comme l'on voit, beaucoup d'analogie entre cette projection et le développement conique.

Proposons-nous pour application, de développer un demi-fuseau sphérique dont l'angle est de 100^{gr}. Ce développement sera la projection d'un triangle tri-rectangle, ou de la huitième partie de la surface de la sphère.

Fig. 25. Soit Ca le rayon représentatif de la sphère proposée, et aO perpendiculaire et égal à Ca. Si du point a on abaisse sur Co la perpendiculaire ae, elle sera le rayon du parallèle à la latitude de 50^{gr}, en prenant P pour le pôle, et Q pour un point de l'équateur.

Cela posé, on pourra considérer aO comme le côté d'un cône tangent à la sphère, et alors la surface près du cercle de contact coïncidera sensiblement avec la surface sphérique. Or, comme d'une part il s'agit de développer seulement le quart de la cir-

(*) Lorsque l'on veut avoir égard à l'aplatissement de la Terre, on fait ce rayon $= \frac{\cot L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$; parce que dans l'ellipse (*fig.* 27 Géod.) on a tang $PMA = \cot L = \frac{At}{AM}$, At, qui est le rayon dont il s'agit, représentant la tangente au point A, terminée au petit axe MP.

conférence dont *ae* est le rayon, ou, ce qui est de même, le quart de la surface courbe du cône droit qui a *Oa* pour côté; que, d'une autre part, *ae* est le sinus de 50^{gr}, lorsque le rayon *aC* est pris pour celui des Tables; on aura log. sin $50^{gr} = 9,8494850$ et sin $50^{gr} = 0,70711$. Ensuite $\frac{1}{4}$ circ $\overline{ae} = 1,1101627$; enfin, puisque l'arc *aMb* décrit d'un rayon $aO = 1$ doit avoir pour longueur 1,1101627, on trouvera le nombre de grades de cet arc par cette proportion

$$3,14 : 200^{gr} :: 1,1101627 : x = 70^{gr},71.$$

Telle est la valeur de l'angle *aOb*, ou l'amplitude de l'arc *ab*. Fig. 26.

Maintenant, si l'on veut avoir les grades de longitude de 5 en 5, on divisera l'arc *ab* en vingt parties égales, et le milieu *M* de cet arc sera sur l'axe *OM* de la carte. Mais comme il n'est pas possible de déterminer la position des autres parallèles, ainsi que la longueur de leurs grades respectifs, sans avoir une échelle de parties égales, construite d'après le nombre de mètres contenus dans le rayon moyen *aC* de la Terre, rayon qui, comme l'on sait, $= 6366198^{m}$, il est nécessaire de procéder préalablement à la construction de cette échelle.

Pour cet effet, on portera sur une ligne indéfinie *mC'* (fig. 27) $636^{part},\frac{6}{10}$ de *C'* en *m*, et l'on prendra *a'C'* égal au rayon *aC* (fig. 25); puis, par tous les points de division de la ligne *mC'*, on mènera parallèlement à *a'm* les droites *xx'*, *yy'*..., la ligne *a'C'* étant par ce moyen divisée en parties proportionnelles à *mC*, on formera sur ce module l'échelle de la figure 26.

L'échelle de la carte étant ainsi construite, on y prendra une longueur de $50^{parties}$ ou myriamètres pour la valeur des grades du méridien, pris de 5 en 5, et l'on portera cette longueur sur l'axe de la carte, dix fois au-dessus et dix fois au-dessous du parallèle moyen *ab* (fig. 26). Ensuite, du point *O*, comme centre, on décrira des arcs indéfinis, passant par tous les points de division de l'axe *OM*; alors on aura les parallèles de 5 en 5 grades. Enfin, sur chaque parallèle on prendra des distances égales chacune à cinq fois la valeur du grade de longitude donné par la Table III. Ainsi, sur le parallèle de 55^{gr}, la longueur du grade de longitude $= 6^{myriam},49$; parconséquent il faudra, à partir de l'axe de la

carte et de part et d'autre de cet axe, porter dix fois l'intervalle $6{,}49 \times 5 = 32^{myriam},45$ pris sur l'échelle. Lorsque tous les points par où doivent passer les méridiens auront été déterminés de cette manière, on tracera les méridiens comme il a déjà été dit, et comme on le voit d'ailleurs par la figure (*).

Il est à remarquer que l'amplitude de l'arc d'un parallèle quelconque, déterminée par cette méthode, sera un peu plus grande qu'elle ne devrait être, puisque l'on donne à la corde d'un arc de 5^{gr} la longueur même de cet arc; mais l'erreur qui résulte de cette construction est d'autant moindre que la courbure des parallèles est plus petite. D'ailleurs on pourrait, comme pour le parallèle moyen, déterminer l'amplitude de tout autre parallèle, par l'angle que forment les deux rayons menés aux extrémités de ce parallèle.

Au lieu de se donner arbitrairement, comme ci-dessus, le rayon de la sphère, on en fixe le plus souvent la longueur, à l'aide d'une échelle construite d'avance et dont les parties sont dans un rapport déterminé avec le mètre. Par exemple, suivant le Tableau V des échelles métriques adoptées par le Dépôt général de la Guerre, l'échelle pour le dessin et la gravure de la carte de chacune des quatre parties du monde, est de $\frac{1}{2000000}$, c'est-à-dire que 2000000 mètres pris sur le terrain seront représentés sur la carte par une longueur réelle de 1 mètre. D'après cela, le rayon de la Terre, qui est de 6366198^{m}, sera seulement, sur la carte, de $\frac{6^{m},366198}{2} = 3^{m},18$. Ainsi, pour que l'échelle de cette carte soit divisée de 10 en 10 myriamètres, ou de 100000 en 100000 mètres, il faut que 10 myriamètres aient pour longueur 5 centimètres. Dans ce cas, la figure 27 et l'observation qui y est relative deviennent inutiles.

Une difficulté se présente dans cette circonstance, comme au n° 33, c'est de décrire des arcs avec des rayons qui excèdent

(*) Cette figure est construite à l'échelle de $\frac{1}{7000000}$: elle est donc, en raison des longueurs, trente-cinq fois plus petite que la figure réelle, qui doit être à l'échelle de $\frac{1}{2000000}$, comme on le verra plus bas.

de beaucoup les dimensions de la carte et les ouvertures des plus grands compas, armés même de leurs pointes de rallonge, ou bien la longueur du *compas à verge;* mais quand ce moyen ne peut plus être mis en usage, on construit les arcs par points. Voici alors un des procédés que l'on peut suivre : ceux à qui la Géométrie est familière pourront en imaginer d'autres.

On calcule, comme on l'a dit précédemment, l'angle aOb (fig. 26); ensuite le triangle rectangle aOp donne

$$1 : r :: \cos.aOp : Op = r\cos.aOp.$$

et

$$1 : r :: \sin.aOp : ap = r\sin.aOp.$$

La distance Op, que nous désignerons par d, étant trouvée, il sera facile de déterminer autant de points que l'on voudra de l'arc aMb, en les rapportant à sa corde ab; car l'équation du cercle, en comptant les coordonnées du centre O, étant

$$x'^2+y'^2=r^2, \quad \text{d'où} \quad x'=\sqrt{r^2-y'^2},$$

x' et y' désignant respectivement les coordonnées Op', $p'n'$, on aura pp', ou

$$nn'=x'-d=\sqrt{(r+y')(r-y')}-d.$$

Donc si, pour plus de facilité, on divise la corde ab en un nombre pair de parties égales, la formule précédente donnera les distances nn' correspondantes aux points de division de cette corde; et la courbe qui passera par tous les points obtenus de cette manière, sera le parallèle demandé.

On peut avoir en outre à tracer plusieurs droites concourant toutes en un même point situé hors de la carte. Voici pour lors le moyen de se passer de ce point. Soient les droites ab et cd concourant au point o, et supposons qu'il s'agisse de mener par le point e une troisième droite ef, de manière que son prolongement passe aussi par le point o. Pour cet effet, l'on joindra les points a, e; on mènera les droites ac, bd parallèles entre elles, et l'on tirera la droite indéfinie bf parallèlement à ae; alors les triangles semblables aco, bdo fourniront la proportion Fig. 28.

$$ac : bd :: ao : bo,$$

Les triangles semblables *aeo*, *bfo* donneront de même

$$ae : bf :: ao : bo;$$

et à cause du rapport commun, on aura

$$ac : bd :: ae : bf,$$

c'est-à-dire que pour connaître *bf* il faudra chercher une quatrième proportionnelle aux lignes *ac*, *bd*, *ae*.

Ce procédé est surtout utile lorsque, dans le développement conique (n° 38), les méridiens se rencontrent fort loin du centre de la carte. Le même problème peut être résolu avec la règle seulement, et cela, de plusieurs manières. Voyez sur ce sujet *le Numéro 8 de la Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*.

4o. La méthode de projection que je viens d'exposer s'applique aussi avec avantage à la construction des cartes chorographiques. Si l'on voulait, par exemple, former la carte de France ou celle d'Italie, en faisant usage de la projection actuelle, on pourrait prendre pour parallèle moyen celui qui partage à-peu-près en deux parties égales la hauteur de cette carte, tel que le parallèle du 5o^{ième} grade. Alors le rayon du développement de ce parallèle étant en général représenté par la cotangente de sa latitude, serait égal au rayon de la sphère. Or, puisque l'échelle de cette projection doit, suivant le Tableau des échelles métriques, être égal à $\frac{1}{1000000}$, c'est-à-dire au double de celle qui est adoptée pour les cartes géographiques, on pourrait, pour former le canevas de la carte des deux Empires, profiter du développement que l'on aurait effectué de l'une des quatre parties du monde, ou réciproquement.

Le Dépôt général de la Guerre a adopté exclusivement cette projection pour le tracé des cartes chorographiques qui représentent l'ensemble des feuilles de détail. La courbure des parallèles et des méridiens y est réglée d'après celle que prend le 5o^{ième} parallèle, dont le centre est situé sur le méridien rectiligne de Paris, pris pour axe principal; parce que c'est non-seulement à la latitude de ce moyen parallèle que le grade vaut 100000^{mèt}, mais

c'est encore à cause de la facilité d'assembler avec justesse les cartes construites sur la même échelle, d'après la même projection, et qui ont à leurs bords des points communs. Cependant il me semble qu'il serait plus avantageux d'abandonner ce parti pour les cartes chorographiques fort éloignées des deux axes principaux dont il est question, et que l'on est obligé de consulter séparément; afin d'en revenir à prendre pour rayon du parallèle moyen de la partie de zône à figurer, la cotangente de la latitude de ce parallèle, et pour méridien principal, celui qui divise aussi la carte en deux parties égales; car autrement c'est retomber dans des défauts qu'il importe d'éviter quand on ne veut pas nuire à l'exactitude des configurations.

Jusqu'à présent je n'ai pas eu égard à l'aplatissement de la Terre; cependant cette omission peut, dans les cartes particulières, et surtout dans les cartes semi-topographiques occasionner des erreurs sensibles; ainsi, pour atteindre tout le degré de précision possible et suivre une méthode uniforme dans le tracé de ces cartes, on doit considérer la Terre comme un sphéroïde de révolution. Voici donc la solution rigoureuse d'un problème relatif à la projection de Flamstéed.

Étant données la latitude et la longitude d'un point, trouver sur la carte assujétie au développement de Flamstéed, les coordonnées rectangles de ce point.

Fig. 29.

Soit AC le premier méridien, AK le moyen parallèle, M le point dont on demande les distances aux axes rectangles CX, CY. Soit en outre BM le parallèle de ce point, C son centre, λ la latitude du point A situé sur le moyen parallèle, μ l'arc AB rectifié, et L la latitude du point B.

En vertu de ce qui précède, le rayon $CA=\rho$ de la projection du parallèle moyen sera exactement

$$\rho=\frac{a\cot\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}},$$

et celui $CB=R$ de la projection d'un parallèle quelconque MB, aura pour expression

$$R=\frac{a\cot\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}+\mu, \quad \text{ou} \quad R=\rho+\mu;$$

le rayon de l'équateur étant désigné par a, et l'arc μ du méridien étant exprimé en même mesure que ce rayon.

Si l'on dénote par p la longitude du point du sphéroïde dont M est la représentation sur la carte, et par φ l'angle que les deux rayons CM, CA font entre eux; on aura d'abord la longueur de l'arc MB par la formule

$$\text{arc } MB, \quad \text{où} \quad \eta = \frac{a\pi \cos L}{(1-e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{p_c}{200};$$

π étant la demi-circonférence d'un cercle qui a l'unité pour rayon. En effet, sur le globe considéré comme un ellipsoïde de révolution, le rayon d'un parallèle passant par la latitude L est

$$\frac{a \cos L}{(1-e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{(art. 126, Géod.)}$$

et les arcs d'un même rayon sont entre eux comme les nombres de grades qu'ils contiennent.

D'un autre côté, les amplitudes de deux arcs de même longueur étant entre elles réciproquement comme les rayons de ces arcs, il s'ensuit que

$$p : \varphi :: \rho + \mu : \frac{a \cos L}{(1-e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}},$$

d'où

$$\varphi = \frac{ap \cos L}{R.(1-e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour une différence de longitude p' autre que p, on a de même, en désignant par φ', R', x', y' et L' ce que deviennent respectivement φ, R, x, y et L,

$$\varphi' = \frac{ap' \cos L'}{R'.(1-e^2 \sin^2 L')^{\frac{1}{2}}}.$$

Dans cette hypothèse,

$$CP = x = R.\cos\varphi, \qquad PM = y = R.\sin\varphi$$
$$x' = R'.\cos\varphi', \qquad y' = R'.\sin\varphi',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi l'on pourra, à l'aide de ces formules, calculer les coordonnées rectangles de tant de points que l'on voudra, par exemple, celles des sommets des angles des quadrilatères curvilignes formés par les méridiens et les parallèles de la carte. Afin de faciliter les constructions, il sera très-souvent nécessaire de rapporter ces points à d'autres axes parallèles aux primitifs CX, CY; ce qui, au surplus, ne présente aucune difficulté.

Si μ était exprimé en grades, et qu'on voulût le rectifier, on emploierait pour cela la formule (a) du n° 76, Géod.; si, au contraire, μ était donné en mètres, on aurait l'amplitude de cet arc par la formule (1') du n° 6 de ce Traité.

Dans les cartes gravées ou construites à l'échelle de $\frac{1}{500000}$, on se contente de tracer les méridiens et les parallèles de 1 décigrade en 1 décigrade; et comme la courbure des côtés des quadrilatères y est presque insensible, on considère ces côtés comme des lignes droites, ou mieux encore, l'on se sert pour tracer ces courbes de la règle élastique dont nous avons parlé au n° 36. Pour établir ensuite le cadre d'une feuille, l'on forme un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes principaux, c'est-à-dire au méridien de Paris et à sa perpendiculaire tangente au 50ième parallèle; de sorte que la base et la hauteur de ce rectangle peuvent être pris pour axes des coordonnées de la carte. Les méridiens et les parallèles forment alors avec le cadre des intersections dont il importe de calculer aussi les coordonnées. Enfin l'on donne à chaque feuille huit parties de long sur cinq parties de haut, et on la divise en autant de rectangles qu'il y a de bandes ou feuilles de détail.

J'ai déjà observé que la surface terminée par deux méridiens et deux parallèles quelconques sur le développement, est équivalente à sa correspondante sur le sphéroïde, renfermée entre les mêmes méridiens et les mêmes parallèles. Cette propriété se prouve aisément; car l'expression élémentaire de la surface Σ, comprise sur la carte entre l'équateur, le parallèle dont la latitude est L, le méridien principal et un autre quelconque faisant avec celui-ci un angle p, est, en appelant b le demi-petit axe de la Terre,

$$d\Sigma = n \times d\mu, \quad \text{ou} \quad d\Sigma = b^2 p \frac{d.\sin L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^2} \cdot \frac{\pi}{200};$$

c'est aussi visiblement l'expression élémentaire de la surface analogue sur le sphéroïde elliptique : les aires de ces deux surfaces sont donc égales. Si l'on intégrait entre les limites L et L', et cela est facile, on aurait l'expression de la surface comprise, soit sur le sphéroïde, soit sur le développement, entre deux méridiens dont la différence de longitude serait p, et entre deux parallèles dont la différence de latitude serait $L'-L$.

M. Henry, astronome du Dépôt général de la Guerre, doit publier, dans le Mémorial de cet établissement, un Mémoire sur les propriétés et l'usage de la projection actuelle. Outre les formules précédentes qu'il a obtenues de son côté, et réduites en Tables, il est parvenu, par une analyse élégante, à d'autres formules non moins utiles. Je vais en faire connaître quelques-unes, sans toutefois en donner les démonstrations.

Pour déterminer l'angle des méridiens et des parallèles, on observera que celui α que forme un méridien avec le rayon CM qui passe par la commune section de cette courbe et d'un parallèle quelconque, est la différence de l'angle cherché à l'angle droit. D'après cette considération, l'on trouvera cette formule très-simple

$$\operatorname{tang}\alpha = \varphi - p\sin L;$$

on trouvera aussi que la tangente à la courbe du méridien sur le développement, a pour expression

$$T = R.\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\alpha)};$$

que la soutangente

$$t = R.\frac{\sin\varphi}{\operatorname{tang}(\varphi-\alpha)};$$

que la distance du centre des parallèles à la commune section de la tangente et du méridien principal

$$d = R\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}.$$

M. Henry trouve en outre, pour l'expression de la normale de la même courbe,

$$N = R.\frac{\sin\varphi}{\cos(\varphi-\alpha)};$$

pour celle de la sous-normale,

$$n = R \sin \varphi \operatorname{tang}(\varphi - \alpha);$$

pour la distance du centre des parallèles à la commune section de la normale et du méridien principal,

$$h = R \frac{\cos \alpha}{\cos(\varphi - \alpha)};$$

enfin, pour l'expression du rayon γ de courbure des méridiens,

$$\gamma = \frac{a(1-e^2)R}{a(1-e^2)\sin^2\alpha + Rp\cos^2\alpha\cos L(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

L'angle α étant nul pour tous les points du parallèle moyen, la formule précédente se simplifie et devient, attendu qu'alors $L = \lambda$,

$$\gamma = -\frac{r}{p\cos\lambda};$$

r étant le rayon osculateur du méridien elliptique à la latitude λ, (n° 9).

41. Quoique la projection de Flamstéed serve maintenant pour la réunion des détails, l'orthographique est généralement adoptée pour les figurer. Dans celle-ci, ce sont les piés des perpendiculaires abaissées de tous les points du terrain, sur un plan parallèle à l'horizon, qui sont les projections de ces points. Cependant, mathématiquement parlant, la position du tableau varie pour chaque point de la Terre; mais l'on conçoit que quand les cartes topographiques ne représentent pas une trop grande étendue de terrain, la configuration du pays suivant la projection orthographique s'accorde assez bien avec celle à laquelle le développement de Flamstéed donne lieu.

Il ne resterait à parler de la *projection de Cassini*, dont on a long-temps fait usage pour la réunion des levés; mais j'ai dit dans le chapitre XIII du Traité de Géodésie, tout ce qu'il importe le plus de savoir à cet égard. Néanmoins, si l'on désire connaître d'autres propriétés remarquables de cette projection, ainsi que les équations des méridiens et des parallèles que l'on

voudrait y tracer, on pourra consulter le *Traité analytique des mouvemens apparens des Corps célestes*, par Dionis-Duséjour.

Projection de Lorgna.

42. Il existe une autre projection représentant exactement les aires, sur laquelle M. Lorgna a publié un ouvrage fort intéressant et qui a pour titre : (*Princip. di Geografia Astronomico-Geometrica*, in-4°, *Verona*, 1789). Cette projection consiste à représenter des espaces égaux par des régions d'égale étendue. Lorsqu'il s'agit, par exemple, de construire la projection d'un hémisphère sur l'équateur, on prend les *rayons des parallèles*, égaux chacun à la corde du complément de la latitude. Dans cette projection polaire, les parallèles sont des cercles concentriques, mais les méridiens sont des droites partant du centre de la carte, et terminées aux points de division de la projection de l'équateur partagé en parties égales. Les quadrilatères compris entre les méridiens et les parallèles sont égaux et rectangles comme sur la sphère; et la figure des régions, ainsi que les distances, sont très-peu altérées, comme on peut s'en assurer aisément.

On représente de la même manière un hémisphère bordé par l'horizon; mais au lieu des méridiens et des parallèles, il faut employer des cercles *azimutaux* et des *almicantarats* (*). Les uns, comme l'on sait, sont perpendiculaires, et les autres sont parallèles à l'horizon du lieu projeté au centre de la carte. On trouvera dans l'ouvrage cité de M. Lacroix, plus de détails sur ce sujet, et surtout un examen intéressant des avantages et des défauts de toutes les autres projections, par rapport aux différentes conditions que l'on se propose de remplir.

(*) On regrette que ce cas, qui est le plus général et le plus important, ne soit pas traité dans l'ouvrage de M. Lorgna. Aussi M. Henry se propose-t-il de publier un Mémoire sur cette matière, et dans lequel, selon ce qu'il m'a dit, il analysera la question dans toute sa généralité.

Idée de la construction des cartes marines.

Des cartes plates.

43. Les *rumbs de vent* que suivent les marins, ou les directions indiquées par la boussole, ayant la propriété de couper sous le même angle tous les méridiens qu'ils traversent, et par conséquent de former sur le globe une espèce de spirale, ne peuvent être représentés sur une carte où les méridiens ne sont pas parallèles, que par des courbes de cette nature: aussi de là vient la difficulté de tracer commodément sur ces cartes le chemin parcouru, ou mesurer celui qui reste à faire. Pour parer à cet inconvénient, les navigateurs ont imaginé une projection de cartes, dans laquelle les méridiens sont des droites parallèles. Le premier moyen qui se présente à l'esprit pour satisfaire à cette condition, est d'employer le développement cylindrique. Concevons en effet qu'une zône très-peu étendue en latitude soit inscrite ou circonscrite à un cylindre droit dont l'axe coïncide avec celui de rotation du globe, les plans des méridiens couperont la surface courbe du cylindre, suivant des lignes parallèles à cet axe. Les plans des parallèles formeront au contraire sur la surface dont il s'agit des cercles parallèles et égaux chacun à celui de la base du cylindre; mais en concevant que la surface de ce corps soit développée, ces parallèles seront eux-mêmes des lignes droites parallèles entre elles et perpendiculaires aux méridiens. C'est à ce développement que l'on a donné le nom de *carte plate*. Sur cette carte, dont l'invention est attribuée à Don Henri, infant de Portugal, les grades des parallèles n'ont leur longueur réelle, relativement aux grades de latitude, que sur le parallèle commun avec le cylindre et la sphère. Dans le développement du cylindre circonscrit à la sphère entière, l'aire de la carte est égale à celle de la zône sphérique correspondante. On pourrait obtenir de même cette égalité dans tout autre cas, en déterminant convenablement le rayon du parallèle qui servirait de base au cylindre. Cependant il existerait toujours un défaut essentiel dans ce développement, c'est que les grades des parallèles

seraient trop grands vers le nord et trop petits vers le sud du parallèle moyen adopté pour base de la surface cylindrique représentative.

Des cartes réduites.

44. Les cartes dont le but de la construction est non-seulement de rendre les méridiens parallèles, mais encore de conserver les rapports entre les parties des méridiens et celles des parallèles, se nomment *cartes réduites*. Elles ont été imaginées par Mercator et Edward Wright, et sont les seules dont les marins fassent usage pour résoudre des problèmes de navigation. Elles jouissent de la propriété énoncée, lorsque les méridiens sont équidistans et quand les parallèles perpendiculaires à ces méridiens croissent à mesure que la latitude augmente suivant un rapport que je vais déterminer, du moins par approximation.

On sait, par les principes de Géométrie élémentaire, que les longueurs de deux arcs d'un même nombre de grades, sont entre elles comme leurs rayons respectifs: ainsi pour le cas de la Terre supposée sphérique, on a, le rayon étant $=1$,

1^{gr} de paral. : 1^{gr} de l'équat. :: cos. lat. du paral. : 1 :: 1 ; séc. lat.,

d'où

$$1^{gr} \text{ du méridien} = 1^{gr} \text{ du paral.} \times \text{séc. } L;$$

on a de même

$$0^{gr},01 \text{ du méridien} = 0^{gr},01 \text{ du paral.} \times \text{séc. } L.$$

Il résulte de là qu'en faisant constamment sur la carte réduite la minute centésimale d'un parallèle quelconque égale à celle de l'équateur, l'intervalle entre deux parallèles consécutifs, ou la différence de leur latitude répondant à une minute, $=1'$ du paral. $\times$ séc. L; ainsi une plus grande différence sera égale à la somme des sécantes, faite de minute en minute, depuis la plus petite latitude jusqu'à la plus grande.

Ce procédé, que j'indique pour calculer les accroissemens des parties du méridien, n'est pas rigoureux, puisque l'arc d'une minute diffère encore sensiblement d'une ligne droite; il faudrait

donc, pour plus de précision, diviser ce petit espace en secondes centésimales; mais l'on se jetterait alors dans un calcul long et fastidieux, que l'on peut éviter en déterminant la différence de latitude des parallèles, à l'aide des formules que procure le calcul intégral, ou en ayant recours aux *Tables des latitudes croissantes*, publiées dans tous les cours d'Hydrographie. Mon but n'étant que de donner une idée de la construction des cartes marines dont les ingénieurs-géographes ne font d'ailleurs aucun usage, je terminerai ici cette partie de mon Ouvrage, en observant toutefois qu'il existe, ainsi que M. Lagrange l'a démontré, dans les *Mémoires de Berlin, année* 1779, une manière très-générale d'envisager les projections des cartes, et de laquelle il résulte la possibilité mathématique d'obtenir toutes les relations géographiques que l'on veut connaître. Mais les calculs de cet illustre géomètre sont fondés sur une analyse si délicate, qu'il paraît bien difficile d'en déduire des formules et des constructions commodes pour la pratique.

LIVRE III.

OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES DE DÉTAIL, ET QUESTIONS RELATIVES A L'ARPENTAGE.

QUOIQUE la matière qui fait le sujet de ce Livre puisse donner lieu à un ouvrage très-étendu, l'on ne trouvera ici que l'exposé des méthodes les plus générales et les plus faciles à mettre en pratique. Il me paraît, en effet, inutile de s'astreindre à développer une foule de procédés particuliers que chacun peut trouver soi-même, et que l'expérience apprend à employer à propos.

Je n'ai pas non plus parlé des levés à vue, parce que l'ingénieur ou l'officier, chargé de faire rapidement des reconnaissances, n'a besoin d'aucun éclaircissement à cet égard, dès-lors qu'il a acquis l'habitude de figurer le terrain à l'aide des instrumens, et qu'il connaît les préceptes de l'art militaire; mais j'ai jugé convenable de réunir un assez grand nombre de problèmes relatifs à la mesure et à la division des surfaces, afin de rendre cet Ouvrage d'une utilité plus générale, et de suppléer à ce qui manque dans la plupart des Traités d'arpentage.

CHAPITRE PREMIER.

Manière de remplir le canevas d'une carte, ou de lever des plans de peu d'étendue, et description des principaux instrumens employés pour cet effet.

45. LA TOPOGRAPHIE est l'art de représenter toutes les parties d'un terrain, suivant les rapports de leur étendue et de leur position. Comme géomètre, on détermine ces rapports en se conformant en même temps à la loi de la projection orthographique; et comme dessinateur, on donne aux objets de la carte que l'on veut laver avec soin, les couleurs et les ombres que la nature indique, ou seulement, pour les cartes expédiées, l'on applique aux masses et aux détails les signes et teintes conventionnels qui leur sont propres.

L'ingénieur chargé de la triangulation d'un pays ne doit pas négliger de relever autant de points qu'il est possible; il faut qu'il les choisisse de manière que ceux qui doivent figurer les détails puissent établir facilement leurs opérations sur des bases connues et de peu de longueur, et former tous les raccordemens nécessaires, dans le cas où l'étendue du terrain exigerait que la carte fût composée de plusieurs feuilles.

De tous les instrumens dont on peut se servir pour lever les plans, la planchette, la boussole et l'équerre d'arpenteur sont les seuls qui fixeront en ce moment notre attention. Nous en indiquerons même rapidement l'usage, parce que sans la pratique il est impossible d'acquérir des connaissances exactes à ce sujet;

mais avant tout, il convient de dire un mot sur la manière de mesurer les lignes qui concourent au figuré du terrain.

De l'usage de la chaîne métrique.

46. Quoique les bases fournies par la triangulation secondaire soient souvent très-multipliées, on n'est pas pour cela dispensé d'en mesurer d'autres. D'ailleurs, lorsqu'il s'agit de représenter toutes les propriétés particulieres, ou les différens objets qui composent un même domaine, on est obligé de se servir de la chaîne ou du double mètre, afin de connaître la longueur des lignes d'opérations qu'on établit à cet effet. La chaîne est ordinairement de cinq ou de dix mètres, et chaque longueur de mètre est composée de cinq parties dont chacune représente le double décimètre. Cette seconde mesure est préférable à la première, pour mesurer avec plus de célérité une grande longueur. Il faut, avant de s'en servir, la vérifier sur un étalon, et lui donner environ deux centimètres de plus que dix mètres, vu qu'il est impossible de la tendre rigoureusement en ligne droite. D'ailleurs on risquerait, en voulant atteindre cette limite, de rompre les anneaux. Il est inutile d'avertir que l'on doit toujours employer des chaîneurs intelligens, parce que c'est de la précision de leurs opérations que dépend en grande partie la justesse du plan.

Lorsque l'on mesure sur une ligne droite tracée par le moyen de jalons ou de piquets garnis chacun à son extrémité supérieure d'un petit quarré de papier blanc pour servir de point de mire, le chaîneur qui marche en avant, dans la direction de ces jalons, porte dix fiches de fer qu'il plante en terre les unes après les autres, lorsque la chaîne est suffisamment tendue et quand ses extrémités sont dans une même ligne horizontale, quelles que soient d'ailleurs les inflexions du terrain. Ensuite le chaîneur qui vient après enlève ces fiches à fur et mesure. Si la ligne que l'on parcourt est de plus d'une *portée*, c'est-à-dire si elle est plus longue que dix fois la chaîne, on continue la même opération, en retenant ou en écrivant sur un livret le nombre de portées et de mètres que contient la ligne mesurée.

Quand les lignes d'opérations traversent un terrain qui offre une ou plusieurs pentes fort longues, alors au lieu de disposer la chaîne horizontalement, ce qui serait trop gênant et peu exact, on mesure la longueur même de chaque pente; et après avoir estimé l'inclinaison de chacune, soit avec le cercle répétiteur, soit par d'autres moyens que nous expliquerons par la suite, on réduit les mesures à l'horizon à l'aide de la formule suivante.

Soit k la longueur de la ligne droite mesurée, i son inclinaison et x sa longueur réduite à l'horizon, on aura évidemment, pour la propriété du triangle rectangle,

$$x = k \cos i.$$

Mais comme le plus souvent l'angle i est fort petit, il est plus commode de calculer l'excès de k sur x, alors on a

$$k - x = k(1 - \cos i) = 2k \sin^2 \tfrac{1}{2} i.$$

Ainsi la quantité qu'il faut ôter de la longueur mesurée pour la réduire à l'horizon, est égale à deux fois cette longueur multipliée par le quarré du sinus de la moitié de l'angle d'inclinaison.

C'est de cette dernière formule que l'on se sert pour réduire de même à l'horizon les longueurs des règles employées dans la mesure des bases (art. 64, Géod.), mais il faut l'avouer, on peut se dispenser d'effectuer cette correction dans les opérations géodésiques de détail; surtout si celle relative à la longueur mesurée est jugée être moindre que l'erreur commise dans cette mesure.

Le *double mètre* remplace avantageusement la chaîne, quand on doit mesurer de petites distances, ou bien quand on opère dans des lieux rétrécis.

Des levés à la planchette.

47. Cet instrument, l'un des plus utiles pour figurer de suite le terrain, est composé d'une tablette quarrée, plus ou moins grande, portant sur un genou que soutient un pié à trois branches,

et ayant la liberté de se mouvoir en tout sens. Ce genou doit être d'une construction telle que l'on puisse imprimer à la tablette un mouvement de rotation lent et doux, sans toutefois que ce mouvement la dérange de la position horizontale qu'elle doit avoir pendant la durée des observations. Les planchettes à la Cugnot sont en général celles préférées, parce qu'elles remplissent cette condition, et qu'elles sont en outre assez légères et peu susceptibles de se voiler, quand on les expose à l'ardeur du soleil; au lieu que celles dont le genou est à coquille, comme aux graphomètres, ont l'inconvénient de se rabattre souvent, quand on ne serre pas assez la vis du genou, ou d'acquérir un mouvement de trépidation par le moindre vent.

Aux deux côtés opposés de la tablette sont adaptés deux rouleaux dont l'axe, soutenu par deux crapaudines, porte un rochet ou pignon denté à l'un de ses bouts. Ces rouleaux servent à tendre et à rouler à fur et mesure le papier sur lequel on trace les opérations. Les ingénieurs du Dépôt général de la Guerre sont dans l'usage de coller ce papier sur de la mousseline ou de la toile fine et légère, afin que leurs dessins-minutes se conservent plus long-temps et n'éprouvent aucune détérioration pendant la durée de leurs travaux sur le terrain.

On donne la position horizontale à la planchette, au moyen d'un niveau à bulle d'air, ou d'un niveau à perpendicule (Voyez le Nivellement, Livre IV). Le premier, pour l'usage de cet instrument, a environ deux décimètres de longueur et deux centimètres de largeur.

M. Tédenat, proviseur au Lycée de Nîmes et correspondant de l'Institut, propose, dans son *Précis des Leçons de Géométrie appliquée à l'Arpentage*, de substituer à la planchette ordinaire une autre qui, à la solidité et à la justesse, joint la simplicité et la précision dans tous les mouvemens convenables pour établir le parallélisme des rayons visuels. Cette planchette est posée sur un parallélogramme ou quarré de bois qui peut glisser librement entre deux coulisses attachées à la planchette, et ce parallélogramme porte à son centre un plateau ou une pièce de bois circulaire, tournant très-facilement sur son axe placé au centre de la planchette. Au-dessous de cette pièce circulaire il en est

une autre de forme triangulaire, qu'on nomme *tréchoir*, portant à chaque angle une vis mobile, et sur ces trois vis repose la pièce circulaire dont il s'agit. Ce triangle, uni à trois branches mobiles, forme le pié de l'instrument.

Cette planchette, construite de la sorte, est susceptible de tous les mouvemens, sans avoir à craindre qu'elle se dérange; et elle a cela de commode, que pour lui donner un petit mouvement de droite à gauche ou de gauche à droite, après qu'elle a été à-peu-près orientée, il ne s'agit que de la faire glisser entre les coulisses. Ensuite si l'on veut faire avancer ou reculer les lignes déjà tracées sur le papier, on déroule la feuille de dessus un cylindre et on la roule sur l'autre cylindre; ensorte que par ces deux mouvemens on parvient à faire correspondre le point de la station avec celui du plan qui le représente. On communique à la planchette un mouvement de rotation au moyen de la pièce circulaire, et cela sans que l'horizontalité en soit affectée. On la met de niveau à l'aide des trois vis attachées aux angles du *tréchoir*. Enfin on lui imprime un très-petit mouvement, par le moyen d'une vis de rappel ou d'une vis sans fin adaptée aux pièces de dessous, et on l'assujétit dans une position fixe, en faisant usage d'une ou de deux vis de pression.

Il faudrait, pour prendre une idée plus exacte de cette planchette, la voir exécutée. Cependant, au moyen de cette simple description, on pourra la faire construire par un artiste intelligent. J'observerai d'ailleurs que chez les ingénieurs en instrumens de mathématiques, résidans à Paris, il existe des planchettes construites dans cet esprit; il en est même qui sont douées d'un petit mouvement horizontal dans tous les sens, et dont le mécanisme, fort simple, est de l'invention de M. Savart, artiste attaché à l'Ecole d'Artillerie et du Génie de Metz. Mais c'est à l'ingénieur-topographe déjà exercé aux levés, à choisir la forme de planchette qui lui convient le mieux; parce qu'alors il opérera certainement avec plus de célérité, et n'obtiendra pas moins de précision qu'avec tout autre instrument de ce genre.

Comme la planchette ne doit pas servir uniquement de petite table à dessiner, on se sert d'une règle de cuivre surmontée à

ses deux extrémités de deux pinnules qui lui sont perpendiculaires, et dont le milieu des ouvertures forme avec l'un des bords de la règle une seule et même ligne, que l'on nomme de *collimation*. A l'aide de cette règle, dite *alidade*, l'on détermine sur le papier adapté à la planchette la direction des rayons visuels, partant du point où l'on est et aboutissant aux objets environnans. La ligne de collimation s'indique par un trait au crayon, lorsque la planchette et l'alidade ont été placées convenablement.

Au lieu d'une alidade à pinnules, qui n'est bonne que pour de petites distances, on a recours à une alidade à lunette supportée en son milieu par une petite colonne de cuivre fixée à une règle de même métal. La lunette et la règle sont par ce moyen isolées l'une de l'autre; et il résulte de cette disposition, que l'on peut incliner à volonté le canon de cette lunette, pour viser aux objets qui sont au-dessus ou au-dessous du plan horizontal de la station, et que la ligne de collimation représente précisément la projection orthogonale des rayons visuels. Quant à la manière de faire disparaître la parallaxe des fils du réticule, voyez le Traité de Géodésie.

48. En général, il y a deux méthodes de lever les détails, quel que soit l'instrument que l'on adopte. La première consiste à tracer autour de l'espace à figurer un polygone quelconque; d'en relever exactement les angles et d'en mesurer les côtés; puis d'abaisser des petites perpendiculaires de toutes les sinuosités du terrain sur ces côtés pris pour bases, ainsi qu'on le voit (fig. 30).

Si l'espace *ABCDE* était un bois fourré et impénétrable on l'inscrirait entièrement dans un polygone. Les lignes d'opérations se traceraient, au contraire, dans l'intérieur, si cet espace était une île ou un champ entouré de bois ou de marais.

La seconde méthode, qui ne s'emploie ordinairement que quand une seule ligne ou base est accessible, consiste à relever tous les angles que forment avec cette base connue les rayons visuels dirigés de ses deux extrémités à tous les points visibles qui sont tant à sa droite qu'à sa gauche; mais l'on conçoit qu'il importe d'éviter les angles trop aigus et trop obtus, parce que la position d'un

point donnée par l'intersection de deux lignes, est d'autant plus exacte que ces lignes se coupent moins obliquement.

L'emploi de cette méthode suppose que le contour du terrain est composé d'un assemblage de lignes droites; car s'il était courbe et ondulé, on ne pourrait souvent en déterminer qu'un petit nombre de points, et il faudrait, dans ce cas, en dessiner à vue les parties qui n'auraient pas été déterminées avec l'instrument.

49. APPLICATON DE LA PREMIÈRE MÉTHODE. *Supposons* Fig. 31. *que les points* A, H *extrémités d'un côté de triangle secondaire, soient, sur la planchette, représentés respectivement par* a *et* h, *on propose de lever le terrain accessible* ABCD... *et de l'orienter par rapport à la base* AH.

On placera la planchette horizontalement au point *A*, et de manière que *a* lui corresponde le plus exactement possible; ce à quoi l'on parviendra au moyen d'un compas *d'épaisseur* dont les pointes sont recourbées et assez longues pour atteindre presque jusqu'au centre de la planchette. A la pointe inférieure est suspendu un fil à plomb qui indique la direction de la verticale du point *a*, lorsque la pointe supérieure couvre ce point; mais avec un peu d'habitude, l'œil supplée à l'emploi de cet instrument.

Cette disposition faite, on place l'alidade sur la planchette, en faisant coïncider la ligne de collimation avec la droite *ah* tracée sur le papier, et l'on fait tourner la planchette sur son pivot, jusqu'à ce que l'axe de la lunette soit dans la direction de la base *AH*: alors la planchette est orientée et ne doit plus être dérangée tant que l'on observe à la même station. On pique ensuite une aiguille verticalement au point *a*, et pour relever l'angle *BAH* on fait tourner légèrement l'alidade autour de cette aiguille, jusqu'à ce que l'on apperçoive dans la lunette le jalon *B* ou tout autre placé dans l'alignement *AB*. Enfin traçant au crayon une ligne indéfinie, le long de la règle et du côté de l'aiguille, on a, sur le papier, la ligne *ab* faisant avec *ah* l'angle *bah*=*BAH*; pourvu cependant qu'après cette seconde opération la ligne *ah* coïncide avec *AH*, ce qu'il est important de vérifier.

Avant de quitter la station A, on fera mesurer la distance AB, on prendra sur l'échelle du plan le nombre de mètres trouvés, et l'on portera la longueur obtenue de cette manière de a en b. On fera en outre mesurer les parties de la ligne AB, ainsi que les petites perpendiculaires abaissées des points de la courbe sur cette ligne, et on les rapportera sur le plan comme on a rapporté la ligne entière AB. Si l'on a bien opéré, il faudra que toutes les distances partielles Ax, xy... soient égales à AB. Lorsque la courbe $Ax'y'...B$ serpente beaucoup, il est nécessaire de multiplier autant qu'il est possible les perpendiculaires xx', yy'..., et il est commode, dans ce cas, de les rendre équidistantes. Pour abaisser ces perpendiculaires, on se sert de la boussole ou de l'équerre d'arpenteur (nos suivans); d'ailleurs quand elles sont fort courtes, on juge assez bien à l'œil simple de leur direction; mais quand les points x', y'... sont fort éloignés de la ligne AB, on peut les déterminer à la planchette, par le deuxième procédé, en prenant AB pour base.

En quittant la station A, on y plantera un jalon et l'on ira placer la planchette horizontalement au point B; en ayant soin, après avoir ôté le jalon B, de faire convenir le point b du plan avec celui dont il s'agit. On orientera derechef l'instrument, ou, ce qui est de même, on rendra sa nouvelle position parallèle à la première; et à cet effet on mettra, comme précédemment, le bord de la règle qui supporte la lunette, sur la ligne ab; puis l'on fera tourner la planchette jusqu'à ce que l'axe optique de la lunette passe par le jalon A. Dans cet état, la planchette sera orientée. Ensuite pour relever l'angle ABC on fera tourner l'alidade autour de l'aiguille b; et lorsque le rayon visuel passera par le jalon C, on aura sur le plan la direction bC correspondante à BC; par conséquent abc sera égal à ABC.

Il est de la plus grande importance de vérifier ses opérations à chaque station; ainsi, sans déranger la planchette, on mettra le bord de l'alidade sur la ligne bh, et si l'on ne s'est pas trompé sur la mesure de AB, ou en orientant l'instrument, il faudra que l'axe optique de la lunette passe en même temps par le point H du terrain. Dans le cas où ce point serait invisible, on dirigerait des rayons visuels sur d'autres points connus et déjà

représentés sur le plan. On continuera de la même manière pour lever le reste du contour de la figure $ABC...$; et ce sera une dernière preuve de la justesse de toute l'opération, si, après avoir orienté la planchette en E, le rayon visuel eb coïncide exactement avec l'alignement EB.

50. Nous avons prescrit de mesurer tous les côtés du polygone, et cela est indispensable pour bien figurer le contour $Axx'...B$; mais lorsque les lignes AB, BC,... sont les limites mêmes du terrain, et que l'on peut sans inconvénient sacrifier quelque chose de la précision géométrique, la mesure d'une seule base suffit.

En effet, si après avoir déterminé d'une part la longueur de la ligne ab, et de l'autre l'angle $abc = ABC$, on se transporte en C; que l'on fasse correspondre la ligne bc du plan avec la ligne BC du terrain, pour orienter la planchette; et qu'ayant placé une aiguille en a, l'on fasse mouvoir autour d'elle une alidade jusqu'à ce que le rayon visuel aboutisse au jalon A, la ligne de collimation coupera la droite indéfinie bc en un point c qui sera sur la carte la projection de la station C.

Pour déterminer maintenant le point d, faites d'abord convenir le point c avec celui qu'occupait le jalon C, et voyez si la planchette est bien orientée; ensuite cherchez avec l'alidade la direction de l'alignement cd, en visant en D; puis après vous être transporté en D et y avoir orienté l'instrument, faites, comme ci-dessus, tourner l'alidade autour du point a; lorsque le rayon visuel passera par le point A, le bord de la règle coupera la ligne cd en un point d, qui sera celui que l'on cherche, et ainsi de suite.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, qu'il était nécessaire de rattacher les détails à des points donnés d'avance par une triangulation et rapportés déjà sur le papier; mais quand on a seulement pour but de figurer isolément une petite étendue de terrain, le premier point a, peut être pris arbitrairement sur la planchette; et si l'on veut après orienter le plan, on fait usage du *déclinatoire*, ainsi qu'il suit.

51. *Du déclinatoire.* Tout le monde sait que l'aiguille aimantée et mise en équilibre sur un pivot, se dirige constamment

vers le pôle nord. Les géomètres ont conçu l'idée de faire usage de cette propriété pour disposer toujours la planchette parallèlement à elle-même, et connaître l'angle qu'une ligne quelconque tracée sur le terrain, fait avec le méridien magnétique. Cette aiguille est renfermée dans une boîte rectangulaire plus longue que large, et au fond de laquelle on a tracé, dans le sens de la longueur, une ligne appelée *nord-sud* parallèle à l'un de ses côtés. C'est à cet instrument que l'on a donné le nom de *déclinatoire*. On verra bientôt en quoi il diffère de la boussole.

Maintenant, supposons qu'il faille marquer sur un plan la direction de la méridienne terrestre. On orientera d'abord la planchette comme il a été dit précédemment; c'est-à-dire que l'on fera, par exemple, convenir la ligne *ab* du plan avec sa correspondante *AB*. Ensuite on posera le déclinatoire sur la planchette rendue fixe, et on le fera tourner jusqu'à ce que les deux pointes de l'aiguille aimantée tombent sur la ligne *nord-sud*. Cette coïncidence étant obtenue, on tirera une ligne au crayon le long d'un des plus grands côtés du déclinatoire, ligne qui sera par conséquent parallèle au méridien magnétique. Pour avoir ensuite le véritable méridien terrestre, il ne s'agira que de tracer une nouvelle ligne qui fasse avec la première un angle égal à la déclinaison de l'aiguille (*Traité de Physique* de Haüy, n° 781); mais si l'on a seulement pour but de rendre toutes les positions de la planchette parallèles entre elles, en quelque point du plan que l'on opère, on voit bien qu'il faudra faire tourner la planchette sur son pivot, afin que l'aiguille du déclinatoire couvre de nouveau la ligne *nord-sud* supposée d'abord parallèle à la ligne représentant sur la carte le méridien magnétique. A la rigueur, ce parallélisme ne sera jamais parfait, non-seulement parce que la déclinaison de l'aiguille aimantée varie souvent d'un lieu à un autre, et quelquefois aussi dans le même lieu, à différentes heures de la journée, mais en outre, parce que les méridiens magnétiques sont des lignes concourant vers le pôle. La proximité des matières ferrugineuses est aussi une des causes qui font dévier l'aiguille. Ainsi, quoiqu'on accélère de beaucoup les levés en orientant la planchette avec le déclinatoire, il vaut mieux l'orienter par alignement, comme nous l'avons enseigné plus haut.

Voici comment on détermine la déclinaison dont il s'agit. A l'époque des solstices, on trace sur une surface horizontale plusieurs cercles concentriques; on y élève un *stile* ou *gnomon* terminé en pointe, ou mieux encore par une petite plaque percée circulairement et de manière que le trou de cette plaque réponde perpendiculairement au centre commun des cercles. On observe l'ombre de la plaque quelques heures avant et après midi, afin de marquer sur les cercles les passages du spectre lumineux qui occupe le centre de cette ombre. Divisant ensuite en deux parties égales les arcs compris entre deux points correspondans, les lignes tirées du centre des cercles au milieu de chacun de ces arcs seront des méridiennes qui devront toutes se confondre, si l'on a bien fait les observations, ainsi que les opérations graphiques. Dans le cas contraire, il conviendra de prendre un milieu entre tous les résultats.

Maintenant, si l'on place le plus long côté du déclinatoire sur la ligne méridienne que l'on vient de déterminer, l'aiguille, après ses oscillations, formera constamment avec la ligne *nord-sud*, un angle qui sera la mesure de sa déclinaison. En 1802 cette déclinaison était, à Paris, de 22° 3′ vers l'ouest.

Ce procédé, mis en pratique à des époques éloignées des solstices, ne sera pas rigoureusement exact, surtout au moment des équinoxes, parce qu'alors la déclinaison du soleil varie sensiblement pendant l'intervalle des observations correspondantes. Cependant la petite correction qu'il faudrait faire à la détermination précédente est toujours négligeable lorsque l'on se sert du gnomon.

52. APPLICATION DE LA SECONDE MÉTHODE. *Il serait superflu d'entrer dans beaucoup de développemens, relativement à la manière de fixer les points d'un plan par intersections, puisqu'elle ne diffère presque en rien de celle adoptée dans la triangulation. Nous nous bornerons donc à observer que si l'on ne pouvait mesurer que la ligne AE, et qu'il fallût cependant relever les points environnans BCDF...., on se placerait en A pour y orienter la planchette, s'il était nécessaire, ou l'on tirerait sur le papier qui couvre l'instrument une ligne ae à laquelle on donnerait autant de parties de l'échelle que AE contient de mètres. On* FIG. 32.

ferait correspondre respectivement le point *a* et cette ligne avec la station *A* et la base *AE*, et l'on dirigerait successivement l'alidade tournant autour de *a* sur les différens objets *B*, *C*, *F*..., afin d'obtenir les rayons *ab*, *ac*, *af*... Ensuite on irait au point *E* répéter les mêmes opérations qu'on a faites au point *A*, c'est-à-dire que l'on déterminerait les rayons *eb*, *ec*, *ef*..., qui, par leur intersection avec les premiers, acheveraient de déterminer les points *b*, *c*, *f*; alors le plan *abcf* serait semblable à la figure du terrain *ABCF*, ou pour parler plus exactement, *abcf* serait la projection orthogonale de *ABCF*. Quant au point *D*, qui se trouve presque dans la direction de *AE*, on le déterminerait de même par intersection, mais en prenant *ec* pour base.

Il serait très-facile, par ce moyen, d'établir le canevas d'un plan et d'en figurer même tous les détails, indépendamment d'aucun réseau trigonométrique; mais il y aurait beaucoup d'inconvéniens à accorder trop de confiance à la planchette, dont la justesse, dans aucun cas, ne peut égaler celle des instrumens employés pour la détermination géométrique des points fondamentaux d'une carte.

53. L'un des problèmes importans qui se présentent fréquemment dans les levés de détail, consiste à déterminer sur un plan la position de tel point qu'on voudra du terrain, pourvu toutefois que de ce point l'on voie des objets dont la position soit déjà connue. Nous avons donné une solution trigonométrique de ce problème (art. 86, Géod.), voici maintenant comment on peut le résoudre à l'aide de la planchette.

Fig. 33. 1er CAS. *Supposons que les trois points* A, B, C *soient donnés sur le plan qui couvre la planchette; on demande d'y fixer la position du point* D.

On attachera sur la planchette un papier verni et très-transparent, et autour du point *d*, pris à volonté, mais correspondant à *D*, on fera tourner l'alidade pour la placer successivement dans la direction des trois points *A*, *B*, *C*. Les droites indéfinies *da*, *db*, *dc*, tracées sur le papier verni, formeront entre elles les mêmes angles que les droites *DA*, *DB*, *DC*.

Cela fait, on détachera ce papier et on le disposera sur le

plan de manière qu'il ne gode pas, et que les trois droites *da*, *db*, *dc* passent respectivement par les points *a*, *b*, *c* donnés sur ce plan. Lorsque cette circonstance aura lieu, le point *d* sera placé, à l'égard des autres *a*, *b*, *c*, comme le point *D* du terrain l'est à l'égard de *A*, *B*, *C*; il faudra donc décalquer le point *d* sur le plan dont il s'agit.

Si l'on n'a point de papier transparent, alors sur *ab* et *bc*, comme cordes, on décrira des arcs de cercle respectivement capables des angles observés *adb*, *bdc*, et ces arcs se couperont en un point *d* qui sera le point demandé (*Géom.* de Legendre, *liv. II, prob.* 16.). Dans le cas, cependant, où les quatre points *a*, *b*, *c*, *d* seraient sur une même circonférence, cette détermination ne pourrait plus avoir lieu à l'aide des seuls points *A*, *B*, *C*, puisque les deux arcs se confondraient; ainsi il faudrait, pour parer à cet inconvénient, combiner deux des points *A*, *B*, *C* avec un quatrième point connu.

Le premier procédé est à-la-fois plus simple et plus exact que celui-ci, vu qu'il n'exige aucun emploi de la règle ni du compas. Il est même, à quelques égards, préférable à la méthode à laquelle donne lieu l'instrument à trois branches dont quelques ingénieurs se servent pour résoudre le problème dont il s'agit.

2e CAS. *Supposons maintenant que du point de station* D *l'on n'apperçoive que les deux points* A, B, *donnés sur le plan; on demande de déterminer la position du point* D.

Pour cet effet, on orientera la planchette à l'aide du déclinatoire, ce qui ne présentera aucune difficulté si l'on connaît déjà la direction du méridien magnétique à l'égard de la droite *ab*. Après cette opération préliminaire, on visera successivement sur les points *A*, *B*, en faisant passer l'alidade par les points correspondans *a*, *b*, du plan, et le point cherché *d* sera l'intersection des deux rayons *da*, *db*, si toutefois la déclinaison de l'aiguille aimantée est constante, ce qui est évident; mais vû sa variabilité, cette solution, quoiqu'extrêmement simple, est rarement aussi exacte que l'une des précédentes; aussi voilà pourquoi les ingénieurs n'emploient le déclinatoire que le moins possible, pour déterminer la position des points d'un plan.

Des Levés à la boussole.

54. La boussole est un instrument qui, malgré son imperfection, présente à l'ingénieur plus d'avantages que tout autre, pour lever avec promptitude tous les objets destinés à remplir et orner les petites masses figurées à la planchette, ou pour faire des reconnaissances militaires.

Cet instrument est composé, comme le déclinatoire, d'une aiguille aimantée posée en équilibre sur un pivot extrêmement délié, et enfermée dans une boîte quarrée dont l'intérieur est garni d'un cercle divisé en 360 degrés ou en 400 grades; il est même utile que ce cercle soit divisé en demi-grades. Au fond de la boussole sont marqués les quatre points cardinaux, de manière que la ligne *nord-sud*, numérotée $0^{gr},200^{gr}$ est parallèle à l'un des côtés de la boîte. A l'un de ces mêmes côtés est adaptée une alidade à *visière* ou à lunette, laquelle peut prendre toutes les inclinaisons possibles à l'égard de l'horizon, sans cependant se mouvoir dans un plan autre que celui qui est perpendiculaire au contour gradué. La boussole est aussi mobile sur un genou réuni à un pié à trois branches, et que l'on peut détacher de la boîte pour faire servir la boussole au même usage que le déclinatoire.

Lorsque l'on observe avec cet instrument, il faut lui donner la position horizontale et pointer constamment du même côté, pour éviter toute méprise; c'est-à-dire, amener toujours l'alidade à sa gauche ou à sa droite. On compte ensuite les grades consécutivement depuis 0 jusqu'à 400^{gr}.

Nous aurions peu de choses à dire sur l'usage de la boussole, parce que tout ce qui précède trouve ici ses applications. Il suffirait même, à la rigueur, d'enseigner la manière de mesurer l'inclinaison qu'une ligne quelconque du terrain fait avec le méridien magnétique; mais comme nous desirons de rendre cet Ouvrage utile à ceux qui n'ont aucune notion de l'art de lever les plans, nous résoudrons de nouveau deux des problèmes précédens.

Fig. 34. *Lever le plan du polygone* ABCDEF, *dont tous les points sont accessibles.*

On placera horizontalement la boussole au point *A*; et on la fera tourner sur son pivot, jusqu'à ce que le point *B* soit dans la direction de la visière ou de l'axe optique de la lunette. L'aiguille, après son mouvement oscillatoire, prendra la direction *nord*: ainsi, en comptant, suivant l'ordre naturel des numéros de division, le nombre de degrés ou de grades compris depuis le rayon visuel *AB*, ou, ce qui est de même, depuis le zéro de la ligne *nord-sud* jusqu'à la pointe boréale de l'aiguille, on aura la mesure de l'angle observé.

Lorsque l'on ne rapporte pas de suite les mesures prises sur le terrain, on forme un *brouillon* ou registre sur lequel on trace les opérations de la boussole: on écrira donc le nombre de grades trouvés au point *A*, comme on le voit (fig. 34), et en supposant que la ligne *ab* représente sur le brouillon l'alignement *AB*, on écrira sur cette ligne le nombre de mètres contenus dans *AB*. On placera de même la boussole horizontalement au point *B*, et l'on observera l'inclinaison de la droite *BC*, en ayant soin de l'écrire au point *b* du brouillon. L'on continuera de la même manière, jusqu'à ce que l'on soit revenu à la première station *A*.

Un des moyens de s'assurer qu'il ne s'est pas glissé d'erreur notable dans la mesure des angles, est de voir si ceux intérieurs du polygone forment ensemble autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux (*Géom.* de Legendre, *liv. I, prop.* 21); mais comment connaître chacun de ces angles, puisqu'ils n'ont pas été observés immédiatement? La réponse à cette question est facile. Les directions de l'aiguille aimantée étant censées parallèles pour tous les points du plan, l'angle *abc*, par exemple, sera égal à $nab+s'bc$; mais $nab=400-355=45^{gr}$, et $s'bc=309-200=109^{gr}$; donc $abc=45+109=154^{gr}$, ainsi des autres angles.

Pour ce qui concerne la vérification des côtés, on ne pourra la faire qu'en construisant le polygone au moyen d'un rapporteur et d'une échelle. On verra alors si la figure se ferme bien.

La même méthode s'emploie avec succès pour lever le cours des rivières, les sinuosités des chemins, les contours des petites propriétés, les îles de maisons, en un mot tous les détails mi-

nutieux qui ne pourraient être pris que difficilement ou fort lentement avec la planchette; mais à mesure que l'on figure à vue et au moyen de la boussole, il faut rapporter sur la planchette les détails que l'on a obtenus, pour être à même de faire les vérifications nécessaires et de mieux exprimer la forme de terrain que l'on a encore sous les yeux, ou dont on conserve parfaitement le souvenir. On fera bien, même, d'arrêter tous les soirs son dessin, à l'encre de la Chine, afin que le travail du lendemain n'efface rien de celui des jours précédens.

De ce que tous les méridiens magnétiques peuvent, dans un petit espace, être regardés comme parallèles, il s'ensuit qu'il n'est pas absolument nécessaire de faire des stations au sommet de chaque angle du polygone. Par exemple, on peut se dispenser d'observer en B, parce que, connaissant l'inclinaison de BC sur le méridien $s''n''$, on aura celle de ce même côté par rapport au méridien de B. En effet, puisque les angles intérieurs du même côté sont supplément l'un de l'autre, le nombre de grades trouvé au point C excède celui que l'on aurait obtenu au point B de 200^{gr}; ainsi, lorsque dans la construction de la figure on veut, au point b, déterminer la direction de bc au moyen de l'observation faite en c, il faut prendre sur le rapporteur le numéro diamétralement opposé à celui que l'on a trouvé en C : de cette manière, on diminue de beaucoup le nombre des stations.

Il résulte encore de la propriété énoncée, que l'on peut mener d'un point quelconque B une parallèle à la ligne AC. Pour cet effet on observera en A l'inclinaison de la ligne AC, et l'on mettra ensuite la boussole au point B absolument dans la même position qu'au point A. Alors l'alidade Bx sera parallèle à la ligne AC. On voit bien aussi comment il faudrait s'y prendre pour élever ou abaisser une perpendiculaire à une ligne, d'un point donné sur elle ou ailleurs; c'est pourquoi nous ne donnerons point les solutions de ces sortes de problèmes.

Fig. 35. *Deux points* A, B *du terrain étant donnés sur la carte en* a *et* b, *et de plus la direction de l'aiguille aimantée étant connue relativement à la droite* ab, *déterminer sur cette carte la station* M.

On mesurera en *M* les inclinaisons des rayons visuels *MA*, *MB*, par rapport au méridien magnétique, et sur la carte *ab* on tracera les lignes méridiennes *sn*, *s'n'*.... Cela fait, pour fixer l'inclinaison de *am* à l'égard de *sn*, on prendra, comme ci-dessus, le numéro diamétralement opposé à celui que l'on a trouvé en *M*. On en fera de même relativement à la ligne *nb*, et l'intersection *m* de ces deux lignes sera le point demandé.

Si l'on connaissait plus de deux points, il conviendrait, pour vérifier l'opération, de mener d'autres rayons visuels, et d'en déterminer de même la direction sur la carte; ces nouveaux rayons passeraient aussi par le point *m*, à moins qu'il n'y eût erreur dans la première opération ou dans l'une de celles-ci.

55. Entre autres procédés, celui que je viens d'exposer peut servir pour indiquer sur un plan plusieurs points de la crête des montagnes, la position des plateaux, la naissance et la fin des pentes, etc. Cependant ces déterminations géométriques ne suffisent pas, il faut encore indiquer, par des hachures légères, le sens des *lignes de plus grande pente*, c'est-à-dire des courbes que tracent, sur les versans des montagnes, les eaux et en général tous les graves obéissant à la loi de la pesanteur; lier les grands mouvemens du terrain avec ses plus faibles ondulations; saisir le caractère distinctif de chaque objet; en un mot, exécuter avec goût et netteté tout ce que la Topographie emprunte du dessin d'imitation ou de convention (*) Mais ce serait sortir des bornes de mon sujet que de parler en ce moment du dessin et du lavis des plans. Cette matière, d'ailleurs, pour être présentée dans tous ses détails, doit être l'objet d'un Traité séparé. Je donnerai seulement à la fin de cet Ouvrage le Tableau des teintes conventionnelles adoptées par le Dépôt général de la Guerre, relativement aux minutes exécutées sur le terrain. Il serait à desirer que ceux qui sont appelés pour enseigner la Topographie, et qui l'ont peu cultivée, les adoptassent eux-mêmes, comme une loi fixe et propre à établir des rapports communs entre tous les travaux de cette nature. Il faudrait aussi qu'ils fissent copier à leurs élèves, non des des-

(*) La figure 9 donne une idée de la manière d'exprimer les montagnes à la plume dans les cartes à *petit point* et même dans *les cartes topographiques*.

sins composés dans le cabinet et presque toujours mal conçus, mais des cartes faites d'après de bons levés, ou extraites des meilleurs modèles (*).

Des Levés à l'équerre d'arpenteur.

56. Il n'y a guère que les arpenteurs qui fassent usage de l'équerre pour lever les plans de peu d'étendue, et surtout les petites pièces de terre isolées; encore ceux qui ont quelques connaissances de Trigonométrie préfèrent-ils avec juste raison le graphomètre ou le petit cercle répétiteur de $18^{centim.}$ de diamètre. L'instrument dont il s'agit maintenant est ordinairement un cercle de cuivre de 9 à 10 centimètres de rayon, divisé en quatre parties égales par deux lignes qui se coupent au centre à angles droits, et aux extrémités desquelles s'élèvent, perpendiculairement au limbe, quatre pinnules rivées ou assujéties par des vis. Une des pinnules qui se correspondent est fendue par le haut et ouverte par le bas; l'autre, au contraire, est fendue par le bas et ouverte par le haut. Les grandes ouvertures sont traversées en leur milieu par un crin ou une lame de cuivre extrêmement mince : elles sont pratiquées exprès, comme dans les alidades des planchettes, afin que l'observateur distingue plus facilement les objets sur lesquels il pointe. Cet instrument s'ajuste de même que la boussole, sur un pié à trois branches, mais il est seulement soutenu par une douille destinée à recevoir l'extrémité arrondie du pié.

On s'assure de la justesse d'une équerre, en visant un objet éloigné à travers les pinnules, ayant soin de prendre pour oculaire

(*) M. Clerc, capitaine de sapeurs, ingénieur-géographe du Dépôt général de la Guerre, chef de la Topographie à l'École Polytechnique, qui réunit un talent éminent pour le figuré du terrain et le dessin de la carte, beaucoup d'habileté dans un genre de gravure particulier et très-propre à la Topographie, lève, dessine et grave en ce moment des modèles de cartes d'après nature, et construit en même temps, aussi d'après nature, des reliefs-modèles propres à guider les commençans dans les opérations géométriques de détail et le dessin d'imitation. Ces modèles sont destinés à l'instruction des élèves de l'École Polytechnique et des élèves ingénieurs-géographes du Dépôt général de la Guerre. C'est cet Ingénieur qui a bien voulu graver la première planche de cet Ouvrage.

la fente de l'une, et pour objectif le fil de l'autre. On vise de même un objet éloigné, par les deux autres pinnules, et l'on fait tourner l'instrument perpendiculairement sur son pié rendu stable, jusqu'à ce que l'on voie le premier objet à travers les secondes pinnules; ensuite l'on regarde si le second objet est juste dans la direction des deux premières pinnules. Lorsque cette coïncidence a lieu, les quatre pinnules sont exactement disposées; bien entendu que toutes les fois qu'on observe avec cet instrument, les pinnules doivent être toutes quatre perpendiculaires à l'horizon. Il est d'autant plus important de les mettre dans cette position, que sans cela la droite que l'on ferait tracer sur un terrain en pente, dans l'alignement de deux pinnules obliques, aurait une fausse direction, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre.

Aucune des équerres en usage n'est rectifiable; mais il serait facile de les rendre telles, en faisant pratiquer une des fentes dans une petite pièce, mobile entre deux coulisses placées horizontalement et attachées à l'une des pinnules, afin de pouvoir corriger le défaut de coïncidence que l'on aurait remarqué en faisant la vérification dont il vient d'être parlé.

Quand on lève un champ à l'équerre, on mène dans l'intérieur et dans le sens de la longueur, une droite que l'on nomme *base* ou *directrice*. On abaisse, de tous les angles du périmètre, des perpendiculaires sur cette base, et l'on mesure à la chaîne ou au double mètre ces mêmes perpendiculaires ainsi que tous les segmens qu'elles forment sur la base. Il résulte de là que le terrain est décomposé en triangles, trapèzes ou rectangles, et que l'on peut aisément le figurer et en déterminer l'étendue superficielle. Toutes les mesures prises se placent en leur lieu, sur un croquis figuratif, comme le représente la figure 40.

S'il s'agissait de mesurer un terrain dont l'intérieur fût inaccessible, mais dont le pourtour fût libre, on lui circonscrirait un triangle (fig. 36), un rectangle (fig. 37), ou bien un trapèze (fig. 38), ou enfin toute autre figure réductible à un triangle (fig. 39). On abaisserait de même de tous les angles de la figure des perpendiculaires sur les lignes d'opérations prises pour bases, afin de parvenir à la décomposition précédente. C'est ce que l'on voit à l'inspection des figures.

Fig 40. Voici maintenant comment on trouve avec l'équerre le pié des perpendiculaires que l'on veut abaisser. Supposons que l'on veuille déterminer le point *b* où tomberait la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle *B* sur la base *AX*. On placera le centre de l'instrument aux environs de *b*, ou, comme le disent les arpenteurs, on y donnera un *coup d'équerre*, en dirigeant deux des pinnules dans l'alignement *AX* et voyant si le point *B* se trouve dans la direction des deux autres pinnules; mais à moins d'un hasard singulier, ce point sera à gauche ou à droite de cette direction. S'il est à gauche, par exemple, l'on reculera, par estime, l'instrument vers le point *A*, et l'on recommencera la vérification. Après quelques essais pareils, le centre de l'instrument se trouvera en *b*. On mettra d'autant moins de temps à obtenir ce point, que l'on sera plus exercé à ce genre d'opération.

On peut, à l'aide de l'équerre, *juste* ou *fausse*, résoudre sur le terrain un grand nombre de problèmes utiles, comme l'a fait voir M. Servois, professeur aux Ecoles d'Artillerie à Metz, dans un petit Ouvrage ayant pour titre : *Solutions peu connues de divers problèmes de Géométrie-pratique.* Ceux qui auront lu aussi avec attention la *Géométrie de position* de M. Carnot, et sa *Théorie des transversales*, pourront faire eux-mêmes des applications de quelques-uns des principes qui y sont développés et qui n'exigeraient, dans beaucoup de cas, l'usage d'aucun instrument.

Il me resterait à parler des levés à vue; mais comme on ne peut acquérir du tact en ce genre que par un long usage des instrumens, il serait superflu d'entrer dans des détails à cet égard. C'est surtout lorsque l'on doit être chargé de faire des reconnaissances militaires, qu'il est essentiel de s'exercer à figurer le terrain à l'aide du seul coup-d'œil. Voyez d'ailleurs sur ce sujet, dans le 4e numéro du Mémorial du Dépôt général de la Guerre, l'article *Essai sur les reconnaissances militaires*, par M. Allent, chef de bataillon du Génie.

CHAPITRE II.

Solutions de divers Problèmes relatifs à l'Arpentage.

Évaluation des surfaces agraires.

57. On a vu dans le Traité de Géodésie, que quand tous les points d'une carte levée trigonométriquement sont rapportés à une méridienne et à sa perpendiculaire, on peut concevoir tous ceux qui sont sur les limites du terrain, comme les sommets des angles du polygone dont l'aire embrasse la plus grande partie de celle qu'il s'agit d'évaluer. Si, comme nous le supposerons ici, l'on peut faire abstraction de la courbure des côtés de ce polygone, on calculera les aires des triangles et des trapèzes rectangles dont il est composé, en multipliant pour les premiers leur base par la moitié de leur hauteur, et pour les seconds la demi-somme de leurs bases parallèles par leur hauteur. Quant aux petites parties additionnelles ou soustractives, s'il y en a, on les déterminera par la même méthode, après les avoir toutefois décomposées par le procédé indiqué au n° précédent. Cette décomposition doit s'effectuer avec beaucoup de soin sur les feuilles de détail; et pour avoir les longueurs des lignes de construction que l'on établit à cet effet, on les compare à l'échelle de ces feuilles.

Il ne s'agit pas toujours de chercher uniquement la superficie de la contrée dont on a levé la carte; il faut souvent évaluer en particulier celle des terres, des prés, des bois, des marais, des landes, etc... qui font la richesse ou la pauvreté du pays. Cette évaluation ne peut se faire qu'à l'aide d'opérations graphiques analogues à celles dont il vient d'être question, lorsque les détails ont été levés à la planchette et à la boussole; ainsi l'on

pourra décomposer en triangles chaque masse en particulier, comme on le voit par la figure 41, et pour abréger le travail, on calculera deux triangles à-la-fois, en leur donnant, s'il est possible, une base commune; par exemple, l'aire du quadrilatère *ABEF*, composée de celle des deux triangles *ABF*, *BEF*, est égale à la diagonale *BF* multipliée par la demi-somme des perpendiculaires *Aa*, *Ee* abaissées sur cette diagonale.

Il est clair que par ce moyen on déterminera avec assez de promptitude et de justesse toutes les aires partielles de la carte; si donc l'on a calculé, par la méthode rigoureuse précédente, toute son étendue superficielle, il sera facile de vérifier une opération par l'autre. On fera bien, dans cette circonstance, d'adopter différens modes de décomposition, et de calculer plusieurs fois l'aire des mêmes surfaces; parce qu'en prenant un milieu entre tous les résultats, on diminue les erreurs provenant des mesures prises avec le compas. Il est même utile, afin de compléter la description géométrique d'une contrée, d'estimer l'espace occupé par les rivières, les grandes routes, les chemins vicinaux, etc.; pour cela l'on considère ordinairement chacun de ces espaces comme un rectangle dont la base est égale à la longueur développée de la rivière ou de la route, et dont la hauteur est la moyenne arithmétique entre les différentes largeurs que peut avoir l'espace à mesurer. Cette exactitude est suffisante dans presque tous les cas.

Voilà en peu de mots la marche à suivre relativement aux plans d'une certaine étendue; mais si l'on se proposait de calculer la superficie des propriétés de chaque particulier, enclavées dans les différentes masses figurées à la planchette, la méthode graphique que nous venons d'exposer jetterait souvent dans des erreurs considérables, quelque soin qu'on eût pris d'ailleurs pour fixer sur le plan les limites respectives de ces petits domaines, d'après les renseignemens des meilleurs indicateurs du pays. Aussi l'ingénieur chargé de la confection du cadastre d'une commune ou d'un grand territoire, doit-il employer la méthode même des arpenteurs, c'est-à-dire, lever les détails à l'équerre, ou mieux encore, au cercle répétiteur, pour pouvoir ensuite déduire les aires avec plus d'exactitude. Telles sont les opérations qui sont du ressort de l'Arpentage. Nous allons, en faveur des jeunes gens qui

entrent dans la carrière topographique, donner quelques exemples de calculs relatifs à ce sujet, et ensuite nous exposerons le principe de la division des champs.

PROBLÈMES FONDAMENTAUX.

58. PROB. I. *Mesurer l'aire d'un rectangle et d'un parallélogramme.*

Soient $AB = A'B' = 59^m,8$ les bases, et $AC = C'H' = 37^m,05$ les hauteurs du rectangle $ABCD$ et du parallélogramme $A'B'C'D'$. L'aire S de chacune de ces deux figures étant égale au produit de ses deux dimensions, il est clair que l'on a pour le rectangle comme pour le parallélogramme, Fig. 42.

$$S = 59^{mèt},8 \times 37^{mèt},05 = 2215^{m.q},59 = 22^{ares}.15^{m.q},59.$$

PROB. II. *Mesurer l'aire d'un triangle rectiligne.*

1°. *Connaissant la base et la hauteur.*

Soient $AB = 9^m,6$ la base, et $CD = 5^m$ la hauteur du triangle rectiligne ACB. L'aire d'un triangle quelconque étant égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur, on a Fig. 43.

$$S = \frac{9^m,6 \times 5}{2} = 24^{mèt.q}.$$

2°. *Connaissant les trois côtés.*

Il arrive souvent qu'il est impossible de pénétrer dans l'intérieur d'un triangle, et de parcourir même l'espace qui l'environne. Alors on mesure les trois côtés de cette figure, et l'on fait usage de la formule suivante,

$$S = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}, \text{ (Géom. de Legendre, p. 296.)}$$

dans laquelle S désigne l'aire du triangle, a, b, c ses trois côtés, et p son périmètre $= a + b + c$.

Soient $a = 25^m$, $b = 20^m$, $c = 15^m$, on trouvera que

$$S = \sqrt{30.(30-25).(30-20).(30-15)} = 150.$$

On pourrait en général effectuer ce calcul à l'aide des Tables de logarithmes; mais dans ce cas particulier on détermine plus simplement l'aire cherchée, puisque le triangle ABC est rectangle. En effet le quarré du plus grand côté a étant égal à la somme des quarrés des deux autres côtés b, c, on a

$$S = \frac{b.c}{2} = \frac{20 \times 15}{2} = 150.$$

Ce problème est un des plus utiles de la Géométrie-pratique. On peut, à son moyen, évaluer l'aire de quelque polygone que ce soit, sans employer d'autre instrument qu'une chaîne métrique ou le mètre lui-même; puisqu'en mesurant les trois côtés de chaque triangle en lesquels ce polygone sera décomposé, la formule précédente recevra immédiatement son application; mais cette méthode est beaucoup plus longue que celle que j'exposerai bientôt.

3°. *Connaissant deux côtés et l'angle compris.*

Si dans un triangle dont A, B, C sont les angles, et a, b, c les côtés respectivement opposés, on connaît les deux côtés b, c et l'angle A compris, et que l'on nomme h la perpendiculaire CD, on aura, à cause du triangle rectangle ACD,

$$h = b \sin A,$$

en supposant le rayon des Tables $= 1$; mais l'aire $ACB = AB \times \frac{CD}{2} = s$; donc

$$s = \frac{bc}{2} \sin A,$$

c'est-à-dire que l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit des deux côtés connus, multiplié par le sinus de l'angle compris.

Soient $b = 25^m,4$, $c = 30^m,2$, $A = 42^{gr}.15'$, on aura

$$\begin{aligned} \log b &= 1,4048337 \\ \log \tfrac{1}{2} c &= 1,1789769 \\ \log.\sin A &= 9,7887106 \\ \log s &= 2,3725212 \end{aligned}$$

ainsi l'aire du triangle, ou $s = 235^{m.q.},79$.

4°. Connaissant un côté et les deux angles adjacens.

Dans le triangle ABC, l'on a, comme l'on sait,

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin B}{\sin (A+B)} = \frac{b}{c}.$$

De là tirant la valeur de b et la substituant dans la formule $s = \frac{bc}{2} \sin A$ obtenue ci-dessus, on trouve

$$s = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin (A+B)},$$

expression qu'il est facile de calculer de même par les logarithmes.

PROB. III. *Trouver l'aire d'un quadrilatère dont on connaît les deux diagonales et l'angle qu'elle forment.* Fig. 44.

En vertu de l'une des solutions précédentes, on a

$$\text{aire } BEC = \frac{yz}{2} \sin E$$

$$ABE = \frac{xz}{2} \sin E$$

$$AED = \frac{xt}{2} \sin E$$

$$DEC = \frac{yt}{2} \sin E;$$

donc $ABCD = \frac{xz+xt+yz+yt}{2} \sin E = \frac{(x+y)(z+t)}{2} \sin E.$

Il suit de là que l'aire d'un quadrilatère est égale à la moitié du produit de ses deux diagonales, multiplié par le sinus de l'angle compris.

Quoique dans l'Arpentage on ait rarement besoin d'évaluer l'aire des figures régulières, je vais donner quelques exemples de calculs à ce sujet.

PROB. IV. *Mesurer l'aire d'un polygone régulier.* Fig. 45.

Si l'on connaît le côté K d'un polygone régulier et le nombre n de ses côtés, son aire s s'obtiendra à l'aide de la formule

$$s = \frac{1}{4} nK^2 \cot \frac{2q}{n},$$

q désignant le quadrant. L'angle au centre C du polygone étant $= \frac{4q}{n}$, sa moitié $= \frac{2q}{n}$; et comme le triangle ACD est rectangle en D, on a

$$CD = \frac{K}{2} \cot. \frac{2q}{n}.$$

Or l'aire de tout polygone régulier est égale au produit de son périmètre nK par la moitié de son apothème CD; donc, etc.

Pour appliquer la formule actuelle à un exemple, soit $K = 120^m$, et $n = 8$; on aura

$$\begin{aligned} \log K &= 1{,}0791812 \\ \textit{idem} &= 1{,}0791812 \\ \log \tfrac{n}{4} &= 0{,}3010300 \\ \log. \cot. \tfrac{200^g}{8} &= 0{,}3827757 \\ \log s &= 2{,}8421681 ; \end{aligned}$$

l'aire cherchée est donc égale à $s = 695^{m.q}{,}29$.

PROB. V. *Trouver l'aire d'un cercle dont on connaît le rayon.*

L'aire d'un cercle est égale au quarré de son rayon multiplié par le rapport de la circonférence au diamètre, c'est-à-dire par $\pi = 3{,}14159265$: ainsi appelant r le rayon d'un cercle, et s son aire, on a

$$s = \pi r^2.$$

L'approximation sera presque toujours suffisante, en supposant seulement $\pi = 3{,}14$.

Soit pour exemple, $r = 16^m$; on aura

$$s = 3{,}14 \times \overline{16}^2 = 803^{m.q}{,}84.$$

Si l'on voulait opérer par les logarithmes, au double du logarithme du rayon on ajouterait celui de π, lequel $= 0{,}4971499$; et la somme serait le logarithme de l'aire demandée.

Il est évident que l'on peut aussi déterminer le rayon d'un cercle dont l'aire est connue.

PROB. VI. *Déterminer l'aire d'un secteur dont l'arc est de* n *grades, et dont le rayon* $= r$.

La longueur de l'arc du secteur se déterminera à l'aide de cette proportion :

$$200 : \pi r :: n : \text{arc} = n.\frac{\pi r}{200},$$

et puisque l'aire cherchée est égale au produit de cet arc par la moitié du rayon, on a

$$s = n.\frac{\pi r}{200}.\frac{1}{2}r = n.\frac{\pi r^2}{400};$$

par conséquent

$$\log.\text{surf. du secteur} = \log. n + 2\log. r + 7{,}89508988.$$

PROB. VII. *Trouver l'aire du segment dont l'arc comprend* n *grades.* Fig. 45.

L'aire du segment AnB est égale à celle du secteur $ACBnA$, moins l'aire du triangle ABC. Or, par ce qui précède,

$$\text{aire du secteur} = n.\frac{\pi r^2}{400},$$

et celle du triangle $ACB = \frac{r^2}{2}\sin n$;

donc

$$\text{aire du segment} = r^2.\frac{1}{2}\left(n.\frac{\pi}{200} - \sin n\right);$$

donc

$$\log.\text{aire du segment} = 2\log r + \log.\frac{1}{2}\left(n.\frac{\pi}{200} - \sin n\right).$$

Si l'on fait $a = n.\frac{\pi}{200}$, on aura $\log a = \log n + 8{,}196119877$; partant,

$$\log.\text{aire du segment} = 2\log r + \log.\frac{1}{2}(a \mp \sin n);$$

le signe — ayant lorsque $n < 200$, et le signe + lorsque $n > 200$.

PROB. VIII. *Déterminer l'aire d'une ellipse dont on connaît les deux axes.*

Il est démontré dans tous les Traités de calcul intégral, que l'aire d'une ellipse est équivalente à celle d'un cercle dont le rayon serait moyen proportionnel entre les deux demi-axes. Cela posé, soient a et b ces deux demi-axes, et s l'aire cherchée; on aura

$$s = \pi ab.$$

Supposons que $a = 12$ et que $b = 10$, on trouvera

$$s = 3{,}14 \times 12 \times 10 = 3{,}14 \times 120 = 376^{m.q}{,}8.$$

Si au lieu du petit axe $2b$ on connaissait l'excentricité e ou la distance du centre à l'un des foyers de l'ellipse, on aurait

$$s = \pi a \sqrt{a^2 - e^2}.$$

Voici maintenant quelques problèmes qui trouvent leur application en Géographie et complètent l'art. 90, Géod.

PROB. IX. *Déterminer l'aire d'une sphère dont le rayon est connu.*

Soit ρ le rayon d'une sphère, et Σ l'aire de sa surface; on aura (*Géom.* de Legendre. *Liv.* VIII, *Prop.* 18.)

$$\Sigma = 4\pi\rho^2.$$

En supposant que la Terre soit sphérique, $\log \rho = 6{,}8038801$ et pour lors

$$\begin{aligned} \log 4 &= \overline{1},6020600 \\ \log \pi &= 0{,}4971499 \\ 2\log \rho &= 13{,}6077602 \\ \log \Sigma &= 14{,}7069701; \quad \text{d'où } \Sigma = 5092959^{myriam.q.} \end{aligned}$$

La surface de la Terre comprend donc environ ce nombre de myriamètres quarrés.

PROB. X. *Mesurer l'aire d'une zône bordée par deux parallèles dont les latitudes, supposées de même dénomination, sont* L *et* L'.

L'aire d'une zône sphérique étant égale au produit de sa hauteur par la circonférence de la sphère, et cette hauteur étant visiblement égale à $\sin L' - \sin L$, lorsque le rayon de la sphère

$= 1$, on a pour une sphère du rayon ρ

$$\Sigma = 2\pi\rho^2 (\sin L' - \sin L)$$
$$= 4\pi\rho^2 \sin\left(\frac{L'-L}{2}\right)\cos\left(\frac{L'+L}{2}\right).$$

Si l'une des latitudes, L, par exemple, était australe, et que l'autre, L', fût boréale, il faudrait, dans cette formule, faire sin L négatif, et l'on aurait en conséquence

$$\Sigma = 2\pi\rho^2 (\sin L' + \sin L)$$
$$= 4\pi\rho^2 \sin\left(\frac{L'+L}{2}\right)\cos\left(\frac{L'-L}{2}\right).$$

PROB. XI. *Déterminer l'aire d'un quadrilatère sphérique formé par deux méridiens et deux parallèles connus.*

Soient p et p' les longitudes des sommets des angles du quadrilatère dont il s'agit, L et L' les latitudes respectives des deux parallèles. Cela posé, si la zône était entière elle aurait pour mesure la valeur de Σ obtenue dans le problème précédent; mais comme celle que l'on considère est terminée latéralement par deux méridiens faisant entre eux l'angle $p'-p$, et que dans ce cas la zône entière est à sa partie dans le rapport de quatre angles droits à l'angle $p'-p$, on a

$$\Sigma = 2\pi\rho^2 \frac{(p'-p)}{4q} (\sin L' - \sin L)$$
$$= \pi\rho^2 \frac{(p'-p)}{q} \sin\left(\frac{L'-L}{2}\right)\cos\left(\frac{L'+L}{2}\right);$$

q désignant le quadrant.

On a vu, n° 40, que dans la projection de Flamstéed les quadrilatères formés par les méridiens et les parallèles de la carte sont équivalens à leurs correspondans sur le globe. Donc la formule actuelle doit aussi servir à mesurer les espaces que ces quadrilatères occupent réellement sur la carte. Mais pour avoir égard à l'excentricité de la Terre, il convient d'intégrer la valeur de $d\Sigma$ donnée au n° cité. Toute opération faite, on a, en s'arrêtant aux termes en e^2, et en faisant $L' - L = k$,

$$\Sigma' = \frac{\pi b^2}{100} \cdot p \left[\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right)\sin\frac{1}{2}k \cos\left(L' + \frac{1}{2}k\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{16}e^2 \sin\frac{3}{2}k \cos\frac{3}{2}\left(L' + \frac{1}{2}k\right)\right].$$

DE LA MESURE DES POLYGONES IRRÉGULIERS.

Fig. 40. 59. *Déterminer l'aire du polygone irrégulier* ABCD... *levé à l'équerre.*

Ce polygone étant, par suite de l'opération faite avec l'équerre, décomposé en triangles et en trapèzes rectangles, on aura sa superficie ainsi qu'il suit :

aire du triangle $(a) = (11, 6)\ (4, 2)$.....	=	$48^{m.q},72$
du triangle $(b) = (21, 45)\ (6, 5)$.....		139 ,42
du trapèze $(c) = (21)\ (7, 5)$.....		157 ,50
du trapèze $(d) = (13, 7) \times 7$.....		95 ,00
du triangle $(e) = (19, 4)\ (3, 2)$.....		62 ,08
du triangle $(f) = 5.5$.....		25 ,00
du trapèze $(g) = (13, 3)\ (26, 85)$.....		357 ,10
du trapèze $(h) = (11, 1)\ (11, 4)$.....		126 ,54
du trapèze $(k) = 9 \times 4$.....		36 ,00
Somme.....		$1048^{m.q},26$
triangle (l) soustractif $= 4 \times 2$.....		8
aire effective du polygone.....		$1040^{m.q},26$;

ainsi l'aire du polygone est de 10 ares 40 mètres quarrés $\frac{26}{100}$.

Si le terrain à mesurer était terminé par une ligne courbe, comme le représente la figure 46, on multiplierait le plus qu'il serait possible le nombre des perpendiculaires aa', bb', cc'... afin de pouvoir considérer sans erreur sensible le périmètre $abcd$... comme un assemblage de petites lignes droites; et le calcul de la superficie se simplifierait singulièrement en rendant toutes ses perpendiculaires équidistantes. En effet, supposons que les intervalles mx, xy, yz, zt, tn soient égaux; les aires respectives des trapèzes ab', bc'.... dont la hauteur commune est mx, seront

$$\left(\frac{aa'+bb'}{2}\right)\times mx,\quad \left(\frac{bb'+cc'}{2}\right)\times mx.....\left(\frac{ee'+ff'}{2}\right)\times mx;$$

ainsi

$$\text{aire } aa'f'f = \left(\frac{aa'}{2}+bb'+cc'....\frac{ff'}{2}\right)\times mx,$$

c'est-à-dire que l'aire d'un polygone décomposé en trapèzes à bases parallèles équidistantes est égale au produit de la hauteur commune, par la somme faite de la demi-somme des bases ou perpendiculaires extrêmes, et de la somme des perpendiculaires intermédiaires.

Si le polygone curviligne se terminait en pointe aux extrémités *m* et *n* de la base *mn*, les perpendiculaires extrêmes seraient nulles; ensorte qu'il suffirait de multiplier la somme des perpendiculaires intérieures par leur distance, pour avoir la mesure de la surface du polygone.

6o. *Mesurer à l'équerre et déterminer l'aire de chacun des quadrilatères* (x), (y), (z) *qui composent l'enceinte* ABCD. Fig 47.

Soit pris *AD* pour base: on mesurera, 1°. les intervalles *Af'*, *f'g'*, *g'B* supposés perpendiculaires à *AD*; 2°. cette base; 3°. les segmens *Df''*, *f''g''*, *g''E* formés par les perpendiculaires *ff''*, *gg''*, abaissées sur *DE*; 4°. ces mêmes perpendiculaires, ainsi que *CE*. Pour avoir maintenant les aires des quadrilatères (*x*), (*y*), (*z*) on procédera de la manière suivante:

trapèze $Af'ff'' = (8, 5).(38) =$	$323^{m.q.}$
triangle Dff'' soustractif $= 9 \times 1$	9
aire (*x*)	$314^{m.q.}$
trapèze $Ag'gg'' = (21 \times 35)$	$735^{m.q.}$
triangle Dgg'' soustractif $= (21 \times 3)$...	63
quadrilatère $(x)+(y)$	672
moins (*x*)	314
aire (*y*)	$358^{m.q.}$
trapèze $ABCE = 51 \times 22$	$1122^{m.q.}$
triangle DCE soustractif $= 4 \times 26$	104
quadrilatère $ABCD = (x)+(y)+(z)$	$1018^{m.q.}$
moins $(x)+(y)$	672
aire (*z*)	$346^{m.q.}$

Au lieu de mesurer les bases et les hauteurs des triangles rec-

tangles Dff'', Dgg'', il est plus simple de mesurer les intervalles Df, fg, gC; mais pour pouvoir effectuer le calcul précédent, il faut préalablement déterminer ces bases et ces hauteurs. Or c'est à quoi l'on parvient par la théorie des lignes proportionnelles, c'est-à-dire que l'on a, par exemple,

$$DC : CE :: DE :: Df : ff'' : Df'';$$

d'où

$$ff'' = \frac{Df \times CE}{DC}, \quad Df'' = \frac{Df \times DE}{DC},$$

et ainsi du reste.

Fig. 37. 61. *Mesurer au graphomètre ou au cercle répétiteur un polygone rectiligne quelconque, et déterminer son aire.*

Soit le polygone $ABCDE$ dont il s'agit d'évaluer la superficie. On mesurera tous les angles intérieurs et tous les côtés de ce polygone, et la vérification des angles devra se faire sur le terrain même, afin que si l'on découvre une erreur on puisse la rectifier sur-le-champ. Cette vérification s'effectue à l'aide de ce principe connu, savoir, que la somme des angles intérieurs d'un polygone est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés, moins deux.

Dans l'exemple actuel, on a par l'observation,

$$\begin{aligned} \text{angle } A &= 120^{gr} \\ B &= 132 \\ C &= 86\ ,10 \\ D &= 118\ ,15 \\ E &= 143\ ,75 \\ \hline \text{somme} &= 600, \end{aligned}$$

laquelle est en effet égale à celle des angles du pentagone $ABCDE$, puisque $200^{gr} \times (5-2) = 600^{gr}$.

Dans le cas où l'on aurait une faible erreur en plus ou en moins, et cela est très-ordinaire, on diminuerait ou l'on augmenterait chaque angle de cette erreur divisée par le nombre des côtés du polygone. On suppose ici toutefois que les angles sont tous observés dans le même plan et aux sommets des angles du polygone, ce qui peut presque toujours se pratiquer ainsi dans

les opérations de détail, et quand le graphomètre est muni de lunettes plongeantes; auquel cas son limbe se dispose toujours horizontalement.

Il est nécessaire aussi de vérifier sur le terrain si les longueurs des côtés de la figure sont exactes. Pour cet effet, on inscrit le polygone dans le rectangle *xyzt*, dont on détermine les quatre côtés en résolvant les triangles rectangles *BCx*, *CDy*, *EDz*, *AEt*, dans chacun desquels on connaît l'hypoténuse et les angles. On est certain, alors, qu'il ne s'est glissé aucune erreur dans la mesure des côtés du polygone, lorsque ceux opposés du rectangle circonscrit sont égaux. Voici le calcul des côtés des triangles dont il est question.

triangle *BCx*

	1,9860211	= 96^m,83 = *Bx*
log. sin 32^{gr}	= 9,6828250	
log 201^m	= 2,3031961	
l. cos 32^{gr}	= 9,9426561	
	2,2458522	= 176 ,14 = *Cx*

triangle *DCy*

	1,9729764	= 93 ,97 = *Cy*
log. sin 18^{gr},10	= 9,4479316	
log 335^m	= 2,5250448	
l. cos 18^{gr},10	= 9,9822053	
	2,5072501	= 321 ,55 = *Dy*

triangle *EDz*

	2,0937867	= 124 ,10 = *Dz*
log. sin 36^{gr},25	= 9,7317002	
log 230^m,19	= 2,3620865	
l. cos 36^{gr},25	= 9,9254241	
	2,2875106	= 193 ,87 = *Ez*

triangle *EAt*

	1,3935725	= 24 ,75 = *At*
log. sin 20^{gr}	= 9,4899824	
log 80^m,09	= 1,9035901	
l. cos 20^{gr}	= 9,9782063	
	1,8817964	= 76 ,17 = *Et*.

Comme chaque côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé à ce côté, en supposant toutefois le rayon des tables égal à l'unité, il est clair que pour avoir, 1°. le logarithme du côté Bx du triangle BCx, il faut au logarithme de 201^m ajouter le logarithme sinus de 32^{gr}; 2°. que pour obtenir le logarithme du côté Cx, il faut de même au logarithme de 201 ajouter celui du cosinus de 32^{gr}, et ainsi pareillement pour tous les autres triangles dont il est d'ailleurs très-facile de déterminer les angles aigus.

Il résulte de ce calcul que

$$xt = 445^m,68, \qquad yz = 445^m,65,$$
$$xy = 270,11, \qquad zt = 270,04.$$

On peut donc conclure que les mesures ont été assez bien prises.

Pour déterminer maintenant l'aire du polygone $ABCDE$, on calculera celle du rectangle $xyzt$, et on en retranchera les aires des quatre triangles BCx, CDy, DEz, AEt; le reste sera l'aire cherchée. Mais auparavant il faut faire disparaître les petites erreurs qui existent entre les longueurs xt, yz, et xy; zt. On prendra donc pour longueur *réduite* du rectangle $\frac{xt+yz}{2} = 445^m,66$, et pour largeur moyenne, $\frac{yx+zt}{2} = 270^m,07$. On pourra ensuite augmenter zE de $0^m,03$ et diminuer Cx de $0^m,04$, parce qu'il est plus convenable de faire porter la correction sur les plus longues lignes. Quant à la correction relative à la longueur du rectangle, elle est si faible qu'il est inutile d'y avoir égard dans le calcul des triangles dont il s'agit. Cela posé, on aura, en opérant par les logarithmes, pour abréger,

	Log. des aires.	Aires.
rectangle *xyzt*		
Base	2,6490037	
Hauteur	2,4314763	
	5,0804800.....	120359$^{m.q}$,4
triangle *BCx*		
B.	1,9860211	
H.	2,2457594	
Comp. log. 2 =	9,6989700	
	3,9307505.....	8526$^{m.q}$,1
triangle *DCy*.		
B.	1,9729764	
H.	2,5072501	
C. log. 2 =	9,6989700	
	4,1791965.....	15107 ,6
triangle *EDz*.		
B.	2,0937836	
H.	2,2875778	
C. log. 2 =	9,6989700	
	4,0803314.....	12031 ,8
triangle *AEt*.		
B.	1,3935725	
H.	1,8817964	
C. log. 2 =	9,6989700	
	2,9743389.....	942 ,6
		36608$^{m.q}$,1 ..... — 36608 ,1
aire du polygone.....		83751$^{m.q}$,3.

Quoiqu'il faille mesurer tous les angles et tous les côtés d'un polygone, celui *ABCDE* n'en serait pas moins déterminé si l'on connaissait seulement tous les angles moins un et tous les côtés moins

deux, ou bien tous les côtés et seulement tous les angles moins trois, etc.; mais l'on manquerait alors de moyens de vérification, et la détermination des parties inconnues serait du ressort de la Polygonométrie, science dont je vais donner quelques notions. Cependant j'observerai auparavant que, sans recourir à une nouvelle théorie, l'on peut dans tous les cas résoudre les problèmes de ce genre par la simple Trigonométrie. Si, par exemple, dans le polygone $ABCDE$ on connaît tous les angles, mais seulement les côtés AB, BC, CD; on déterminera les deux autres côtés AE, ED, ainsi qu'il suit.

Après avoir calculé par la méthode précédente Ax et Dy, on résoudra le triangle rectangle ADm, pour connaître la diagonale AD, l'angle DAm et par suite l'angle EAD. Ainsi dans le triangle AED, on connaîtra non-seulement les angles, mais encore le côté AD; il sera donc facile de déterminer les deux autres côtés AE, ED.

Principes de Polygonométrie,

ou *Recherches des relations entre les côtés, les angles et l'aire d'un polygone rectiligne.*

Fig. 48. 62. La méthode que je viens d'exposer comporte le calcul des triangles auxiliaires; mais par les formules de la Polygonométrie on obtient immédiatement les quantités cherchées. Afin de donner une idée de ces formules, je vais déterminer CD à l'aide des trois côtés AB, BC, AD, et des deux angles A, B; pour cet effet,

Soient $$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d;$$

soient en outre désignés par (ab), (ac), (ad) les angles intérieurs du polygone ou ceux que les côtés b, c, d font respectivement avec le côté a. Il est clair que l'on aura $AB = Bc + cd + dA$, ou en vertu de la propriété du triangle rectangle,

$$a = b\cos(ab) + c\cos(ac) + d\cos(ad);$$

pareillement

$$b = a\cos(ab) + c\cos(bc) + d\cos(bd)$$
$$c = a\cos(ac) + b\cos(bc) + d\cos(cd)$$
$$d = a\cos(ad) + b\cos(bd) + c\cos(cd).$$

Multipliant par a la première de ces équations, par b la seconde, par c la troisième, et par d la quatrième; ensuite ôtant les trois derniers produits du premier, il viendra,

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2\{bc.\cos(bc) + bd.\cos(bd) + cd.\cos(cd)\}.$$

Mais, angle $(bc) = C$, angle $(bd) = C + D - 200^{gr}$, angle $(cd) = D$; donc

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2[bc.\cos C - bd.\cos(C+D) + cd.\cos D];$$

par la même raison,

$$c^2 = a^2 + b^2 + d^2 - 2[ab.\cos B - bd.\cos(A+B) + ad.\cos A].$$

La même méthode, appliquée au pentagone $ABCDE$, donnerait Fig. 48.

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - 2\begin{bmatrix} bc.\cos C - bd.\cos(C+D) + be.\cos(C+D+E) \\ + cd.\cos D - ce.\cos(D+E) + de.\cos E \end{bmatrix};$$

formule qui a encore lieu pour un polygone d'un plus grand nombre de côtés, et qui s'énonce ainsi : *Le quarré d'un côté quelconque d'un polygone plan est égal à la somme des quarrés de tous les autres côtés, moins deux fois les produits de tous les autres côtés multipliés deux à deux et par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.* La propriété connue du triangle obliquangle est donc un cas particulier de ce principe général.

On voit sur-le-champ que dans le quadrilatère $ABCD$ (fig. 48)

$$b.\sin(ab) = c.\sin(ac) + d.\sin(ad),$$

ou bien que

$$b.\sin B = d.\sin A - c.\sin(A+D).$$

On a pareillement dans le pentagone $ABCDE$ (fig. 49)

$$b.\sin B = e.\sin A - d.\sin(A+E) + c.\sin(A+E+D),$$

et ainsi de suite.

De cette dernière formule on tirerait immédiatement la valeur de l'angle B; mais s'il fallait en déduire l'angle A, on serait obligé de développer les facteurs dans lesquels cet angle se trouve engagé. On aurait, par exemple,

$$b.\sin B = e.\sin A - d.\sin A\cos E - d.\cos A\sin E + c.\sin A\cos(D+E) + c.\cos A\sin(D+E);$$

et après avoir substitué pour $\cos A$ sa valeur $\sqrt{1-\sin^2 A}$, on verrait que l'inconnue $\sin A$ serait donnée par une équation du second degré.

Si dans l'équation précédente on avait $b=0$, le pentagone se changerait en quadrilatère, et pour lors on aurait

$$\text{tang}\, A = \frac{d.\sin E - c.\sin(D+E)}{e - d.\cos E + c.\cos(D+E)},$$

Fig. 48. ou en employant la notation qui convient au quadrilatère $ABCD$,

$$\text{tang}\, A = \frac{c.\sin D - b.\sin(C+D)}{d - c.\sin D + b.\sin(C+D)}.$$

Telle serait la formule dont il faudrait faire usage pour déterminer le troisième angle d'un quadrilatère, si l'on connaissait trois de ses côtés et les angles compris entre les côtés connus.

63. L'aire d'un polygone peut s'exprimer aussi en fonction de ses côtés et de ses angles. Par exemple, l'aire S du quadrilatère $ABCD$ a pour valeur, en conservant la notation ci-dessus,

$$S = \tfrac{1}{2}[ad.\sin A - ac.\sin(A+D) + cd.\sin D]. \qquad (1)$$

Pour le prouver, on prolongera CD et AB jusqu'à leur rencontre en O, et l'on aura

$$\text{aire } ABCD, \text{ ou } S = OCB - ODA.$$

Or si l'on fait $OA=\alpha$, $OD=\gamma$, l'un des principes du n° 58 donnera

$$OCB = \tfrac{1}{2}(c+\gamma)(a+\alpha)\sin O$$

$$ODA = \tfrac{1}{2}\alpha\gamma\sin O;$$

pour lors

$$S = \tfrac{1}{2}(c+\gamma)(a+\alpha)\sin O - \tfrac{1}{2}\alpha\gamma \sin O$$
$$= \tfrac{1}{2}ac \sin O + \tfrac{1}{2}a\gamma \sin O + \tfrac{1}{2}\alpha c \sin O.$$

D'ailleurs le triangle ODA donnant

$$\left.\begin{array}{l} \alpha : d :: \sin D : \sin O \\ \gamma : d :: \sin A : \sin O \end{array}\right\} \text{ on aura } \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{d \sin D}{\sin O} \\ \gamma = \dfrac{d \sin A}{\sin O}, \end{array}\right.$$

et la valeur de S deviendra

$$S = \tfrac{1}{2}ac \sin O + \tfrac{1}{2}ad \sin A + \tfrac{1}{2}cd \sin D;$$

enfin à cause de $O = A + D - 200$, il est visible que cette valeur de S prendra la forme de celle (1).

Un procédé analogue donnerait pour l'aire du pentagone $ABCDE$ Fig. 49.

$$S = \tfrac{1}{2}\left[\begin{array}{l} ab.\sin B - ac.\sin(B+C) + ad.\sin(B+C+D) \\ + bc.\sin C - bd.\sin(C+D) + cd.\sin D \end{array}\right],$$

et ainsi de même pour tous les autres polygones.

Il ne faut pas oublier, en appliquant ces formules, qu'il s'agit des angles intérieurs du polygone. Quant au choix des signes qui doivent affecter les sinus et cosinus, voyez l'observation de la page 89 du Traité de Géodésie.

Le principal avantage de ces formules sur la méthode du n° 61, c'est qu'*elles dispensent de construire une figure*. Elles se présenteraient sous une forme plus symétrique, relativement aux signes, si au lieu des angles intérieurs du polygone on employait les angles extérieurs, c'est-à-dire ceux qui sont formés par un côté de la figure et le prolongement du côté suivant.

64. Il n'est pas toujours possible de mesurer tous les côtés et tous les angles d'un polygone; souvent même on n'a d'autre parti à prendre que de choisir pour base unique un de ses côtés, et de déterminer les sommets des angles par intersection, ainsi qu'il

a été enseigné au n° 52. Voyons donc comment on peut, dans ce cas, en évaluer la surface.

Fig. 49. Soit $ABCDE$ le polygone convexe proposé, $AB = a$ la base mesurée; soient en outre $EAB = \varepsilon$, $DAB = \delta$, $CAB = \gamma$ les angles observés au point A, et $EBA = \varepsilon'$, $DBA = \delta'$, $CBA = \gamma'$ les angles observés au point B.

On remarquera que l'aire polygonale pourrait s'évaluer en calculant d'abord les coordonnées des points E, D, C, et cherchant ensuite les aires des triangles et des trapèzes en lesquels le polygone $AEDCB$ se trouverait décomposé. Mais mon but dans cette circonstance étant d'obtenir l'expression analytique de l'aire de ce polygone en fonction des seules quantités prises sur le terrain, je concevrai ce même polygone divisé en triangles qui aient leurs sommets à l'une des extrémités de la base AB; tels sont, par exemple, les triangles EAD, DAC, CAB. Or, d'après ce que l'on a vu au n° 58, chacun a pour mesure la moitié du produit de deux de ses côtés, multiplié par le sinus de l'angle compris; ainsi

$$\text{surf. } EAD = \frac{AE \times AD}{2} \sin EAD;$$

mais dans le triangle AEB on a

$$\sin(\varepsilon + \varepsilon') : a :: \sin\varepsilon' : AE = \frac{a \sin\varepsilon'}{\sin(\varepsilon + \varepsilon')}.$$

Dans le triangle DAB on a pareillement

$$\sin(\delta + \delta') : a :: \sin\delta' : AD = \frac{a \sin\delta'}{\sin(\delta + \delta')}.$$

Introduisant ces valeurs dans l'expression précédente, on obtient

$$\text{surf. } EAD = \frac{a^2}{2} \frac{\sin\varepsilon' \sin\delta'}{\sin(\varepsilon + \varepsilon') \sin(\delta + \delta')} \cdot \sin(\varepsilon - \delta).$$

Concluons de là que

$$\text{surf. } DAC = \frac{a^2}{2} \frac{\sin\delta' \sin\gamma'}{\sin(\delta + \delta') \sin(\gamma + \gamma')} \cdot \sin(\delta - \gamma)$$

$$\text{surf. } CAB = \frac{a^2}{2} \frac{\sin\gamma \sin\gamma'}{\sin(\gamma + \gamma')};$$

par conséquent l'aire cherchée ou

$$\int.(AEDCB)=\frac{1}{2}a^2\left\{\begin{array}{l}+\dfrac{\sin\varepsilon'\sin\delta''\sin(\varepsilon-\delta)}{\sin(\varepsilon+\varepsilon')\sin(\delta+\delta')}\\ +\dfrac{\sin\delta''\sin\gamma'\sin(\delta-\gamma)}{\sin(\delta+\delta'')\sin(\gamma+\gamma')}\\ +\dfrac{\sin\gamma\sin\gamma'}{\sin(\gamma+\gamma')}\end{array}\right\};$$

prenant le point B pour sommet commun des triangles qui composent la surface du polygone, on a de même

$$\int.AEDCB=\frac{1}{2}a^2\left\{\begin{array}{l}+\dfrac{\sin\gamma\sin\delta\sin(\gamma'-\delta'')}{\sin(\gamma+\gamma')\sin(\delta+\delta'')}\\ +\dfrac{\sin\delta\sin\gamma\sin(\delta''-\gamma')}{\sin(\delta+\delta'')\sin(\gamma+\gamma')}\\ +\dfrac{\sin\varepsilon\sin\varepsilon'}{\sin(\varepsilon+\varepsilon')}\end{array}\right\}.$$

On trouverait, par une méthode absolument semblable, l'expression de l'aire de tout autre polygone. Dans la pratique, il conviendra de se servir des deux expressions de la même surface, afin de pouvoir constater l'exactitude des résultats numériques. Je laisse aux jeunes arpenteurs le soin d'appliquer eux-mêmes toutes les formules précédentes: il me suffisait de leur donner une idée de la Polygonométrie; mais c'est dans les écrits de M. Lhuillier, de Genève, et dans ceux de M. Carnot, qu'ils pourront puiser des connaissances plus étendues sur cette matière.

CHAPITRE III.

Suite de Problèmes relatifs à l'Arpentage.

Division des surfaces.

65. La plupart des auteurs qui ont traité de la division des surfaces, se sont plutôt attachés à résoudre un grand nombre de problèmes de pure curiosité, et à en donner des solutions graphiques, qu'à faire connaître la méthode de calcul qu'il est préférable d'employer dans la pratique de l'arpentage. C'est cette méthode que je vais développer le plus brièvement possible et en m'attachant aux cas qui se présentent le plus souvent.

Fig. 50. *Diviser un triangle en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné, 1°. par une ligne partant du sommet; 2°. par une ligne parallèle à l'un des côtés du triangle.*

La première condition sera évidemment satisfaite, si l'on divise la base du triangle en parties proportionnelles aux deux nombres qui expriment le rapport donné, puisque les triangles qui ont même hauteur, sont entre eux comme leurs bases. Si ce rapport est comme $m : n$, et que la base du triangle soit b, on aura $AD = x$ par la proportion

$$m : n :: x : b - x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{mb}{m+n};$$

faisant, par exemple, $m = 5$, $n = 9$ et $b = 36^{m.}$, on aura

$$x = \frac{5.36}{14} = 12^{m},86.$$

Fig. 51. Si on voulait partager le triangle ABC en trois parties qui fussent entre elles $:: m : n : p$, on aurait visiblement, en dési-

gnant AD par x et DE par y,

$$x = \frac{mb}{m+n+p}, \qquad y = \frac{nb}{m+n+p}.$$

Ainsi, en supposant que les triangles partiels dussent être égaux en surface, les parties AD, DE, EC seront elles-mêmes égales.

Pour remplir la seconde condition, on remarquera que les deux triangles ABC, DBE sont semblables, et que par conséquent leurs aires sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues. On a donc en général Fig. 52.

$$ABC : DBE :: \overline{AB}^2 : \overline{BD}^2.$$

Mais par hypothèse, $ABC : DBE :: m : n$;

donc $$\overline{AB}^2 : \overline{BD}^2 :: m : n;$$

donc $$BD = AB\sqrt{\frac{n}{m}};$$

ce qui signifie que BD est moyen proportionnel entre $\frac{n}{m}.AB$ et AB.

Soit $m : n :: 2 : 1$ et $AB = 15^m$, on trouvera que

$$BD = 15\sqrt{\frac{1}{2}} = 15 \times 0{,}707 = 10^m{,}605.$$

S'il s'agissait de diviser le triangle ABC en cinq parties égales en surface, par des lignes parallèles à AC, on aurait évidemment Fig. 53.

$$Bd = AB\sqrt{\frac{1}{5}}, \quad Bd' = AB\sqrt{\frac{2}{5}}, \quad Bd'' = AB\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad Bd''' = AB\sqrt{\frac{4}{5}}.$$

On voit par là qu'il est inutile de connaître la surface d'un triangle, pour le partager ainsi qu'il précède.

66. *Partager le triangle* ABC *en trois parties équivalentes, par des lignes partant d'un point* D *donné sur la base* AC. Fig. 54.

Puisque les bases AD, DC des triangles AeD, DeC sont connues, on aura leurs hauteurs respectives en divisant leurs aires par la moitié de ces bases. S'il arrivait que l'un des quotiens fût

plus grand que la hauteur BH du triangle proposé, cela indiquerait que les deux lignes De, De' doivent couper le même côté AB ou BC. La figure 55 offre l'exemple de ce cas, pour lequel on a alors

$$ek = \frac{ABC}{3} \cdot \frac{2}{AD} = \frac{2}{3}\frac{ABC}{AD},$$

$$e'k' = \frac{2}{3}ABC.\frac{2}{AD} = \frac{4}{3}\frac{ABC}{AD}.$$

Dans la pratique, il est plus commode d'employer Ak, Ak'; pour connaître ces abscisses, on fera la proportion

$$BH : AH :: ek : Ak, \quad \text{d'où} \quad Ak = \frac{AH \times ek}{BH},$$

on aura de même

$$Ak' = \frac{AH \times e'k'}{BH}.$$

Fig. 56. Cette question se résout élégamment et avec beaucoup de simplicité, par le principe de la transformation des figures. En effet, si on partage AC en trois parties égales, et que par les points de division F, F', on mène à BD les parallèles eF, $e'F'$, les droites eD, $e'D$ diviseront le triangle proposé en trois parties équivalentes, ce qui est évident; car d'une part le triangle BCF' est le tiers de ABC, et de l'autre, le triangle $Ce'D$ est équivalent à BCF'. On voit de même que $AeD = ABF = \frac{ABC}{3}$.

Lorsque l'on opère sur le terrain, on mesure AD et AB, et l'on partage le côté AB en parties proportionnelles aux deux parties AF, FD, c'est-à-dire que l'on établit la proportion

$$AD : AB :: \frac{AC}{3} : Ae.$$

Par ce moyen l'on obtient le point e avec facilité. On détermine de la même manière le point e'.

Quoique le triangle ABC ne soit divisé qu'en trois parties équivalentes, on conçoit bien que la méthode que je viens d'exposer est également applicable à la division du triangle en un plus grand nombre de parties, et qu'il serait inutile d'évaluer l'aire du triangle à diviser, si cette évaluation n'intéressait pas les co-partageans.

Ce problème trouve son application lorsque l'on veut pratiquer des sentiers De, De' aboutissant à un puits commun D. Si le centre de ce puits était donné dans l'intérieur du triangle, par les coordonnées ou distances Af, fD, et que la droite fD fût une ligne de division, on aurait Df', Df'', ainsi qu'il suit. Fig. 57.

Faisons les données $\begin{cases} Af = a, & Df = b, \\ AH = c, & BH = d, \end{cases}$

et les inconnues $\quad Ag' = x, \quad f'g' = y.$

On aura, à cause des triangles semblables ABH, $Af'g'$,

$$dx = cy, \qquad (1)$$

de plus, l'aire du trapèze $f'g'fD$ est $\frac{y+b}{2}(a-x)$, celle du triangle $Af'g' = \frac{xy}{2}$; et comme l'aire du quadrilatère $Af'Df$ qui est connue, est égale à $\frac{ABC}{3} = m^2$, on a l'équation

$$m^2 = \frac{y+b}{2}(a-x) + \frac{xy}{2} = \frac{y+b}{2}.a - \frac{bx}{2}. \qquad (2)$$

Substituant dans celle-ci pour y sa valeur déduite de l'équation (1), il vient

$$m^2 = \left(\frac{dx}{2c} + \frac{b}{2}\right)a - \frac{bx}{2};$$

partant

$$x = \frac{(2m^2 - ab)c}{ad - bc},$$

formule qui est générale, quel que soit même le rapport de l'aire m^2 à celle du triangle ABC. Pour que le point f' soit sur AB, on voit bien que x doit être plus petit que c. Si ce point devait être situé sur BC, sa détermination ne présenterait pas pour cela plus de difficulté.

Au lieu de considérer Df comme une ligne de division, prenons pour telle la droite BD menée du point D au sommet du triangle à diviser, et déterminons la position des deux autres lignes Df', Df''. Fig. 58.

Après avoir calculé l'aire ABC et mesuré sur le terrain la perpendiculaire Dh abaissée du point donné sur le côté AB, on divisera le tiers de ABC par la moitié de Dh, et le quotient sera la distance Bf'. On mesurera pareillement la droite Dh' perpendiculaire à BC, et s'il arrive, comme dans le cas de la figure 55, que le triangle BDC soit moindre que $\frac{ABC}{3}$, on divisera la différence CDf'' par la moitié de la perpendiculaire Df pour avoir la base Cf''.

Il existe de ce problème une solution analogue à celle du n° 66. Fig. 59. Voici en quoi elle consiste. On fait $CE = \frac{AC}{3}$, et l'on joint D, E, puis l'on mène Bf'' parallèle à DE. Cela fait, on prend $BM = \frac{Bf''}{2}$, et l'on mène Mf' parallèle à AD : alors les droites Df', Df'' sont les deux autres lignes de division cherchées. Il est facile de trouver la raison de cette construction, qui serait d'ailleurs peu commode à exécuter sur le terrain.

Fig. 60. 67. *Partager un triangle en deux parties proportionnelles à* m *et* n *par une ligne* EF *perpendiculaire à sa base.*

Soient $AE = x$, $EF = y$, $AD = a$, $AB = b$, $CD = h$,

l'aire du triangle ACB est $\frac{bh}{2} = s$, et à cause que

$$AEF : EFCB :: m : n,$$

on a

$$AEF \text{ ou } T = \frac{m.s}{m+n} = \frac{xy}{2}.$$

De plus, les triangles semblables ACD, AFE donnent

$$a : h :: x : y, \text{ d'où } y = \frac{hx}{a}.$$

Substituant cette valeur dans celle de T, on obtient

$$x^2 = \frac{ma.b}{(m+n)}.$$

Il résulte de là que x est moyen proportionnel entre b et $\frac{ma}{m+n}$.

Si l'on avait $m = n$, auquel cas le triangle AFE serait la moitié de ACB, on aurait

$$x^2 = \frac{ab}{2};$$

ainsi on obtiendrait x en prenant une moyenne proportionnelle entre la base AB et la moitié du segment AD. Il pourrait arriver que AE fût plus grand que AD, alors on désignerait eB par x et BD par a.

68. *Diviser un quadrilatère en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné, et de manière que la ligne de division soit parallèle à l'un des côtés de ce quadrilatère.* Fig. 61.

Ce problème se résout très-simplement par la Géométrie élémentaire. En effet, si l'on connaissait les coordonnées Ar, rR du point d'intersection des deux droites AC, BD, on déterminerait aisément l'aire du triangle ARB, et celle du triangle fRf'. Ensuite, à cause de la similitude de ces deux triangles, on aurait

$$ARB : fRf' :: \overline{Rr}^2 : \overline{Rk}^2,$$

et de là

$$\overline{Rk}^2 = \frac{fRf' \cdot \overline{Rr}^2}{ARB}. \qquad (1)$$

Un exemple numérique fixera entièrement les idées à cet égard.

Soient donc.

$$Ac = 6, \quad Bd = 8, \quad cd = 24,$$
$$Cc = 9, \quad Dd = 13,$$

et les inconnues $Ar = x$, $Rr = y$.

Les triangles semblables ARr, ACc donneront

$$6y = 9x;$$

les triangles semblables RrB, DdB, donneront de même et à cause de $rB = AB - Ar = 38 - x$,

$$8y = 13.38 - 13x;$$

éliminant x entre ces deux équations, l'on trouvera

$$y = \frac{39 \cdot 38}{26+24} = 29^m,64.$$

Cela posé, on aura

$$\begin{aligned} \text{triangle } ACc &= 27^{m.q} \\ \text{trapèze } CcdD &= 264 \\ \text{triangle } dDB &= 52 \\ \text{aire } ACDB &= 343^{m.q}; \end{aligned}$$

et si l'on suppose que ff' doive diviser le quadrilatère $ACDB$ en deux parties équivalentes, on aura

$$\text{aire } CDf'f = \frac{343}{2} = 171^{m.q},5.$$

D'ailleurs, l'aire du triangle ARB étant $= \frac{38}{2} \times 29,64 = 563^{m.q},16$, on a

$$\text{aire } fRf' = 563,16 - 171,5 = 391,^{m.q},66.$$

De là l'équation (1) devient

$$\overline{Rk}^2 = \frac{391,66 \times (29,64)^2}{563,16},$$

ou en prenant la racine quarrée de part et d'autre,

$$Rk = 29,64 \sqrt{\frac{391,66}{563,16}}.$$

Si l'on effectue cette opération par les logarithmes, pour plus de promptitude, on aura

$$\begin{aligned} \log 391,66 &= 2,5929092 \\ \text{comp. log } 563,16 &= 7,2493682 \\ \text{somme} &= 19,8422774 \\ \text{demi-somme} &= 9,9211387 \\ \log 29,64 &= 1,4718782 \\ \log Rk &= 1,3930169 = 24^{m},718. \end{aligned}$$

La distance Rk étant $= 24^{m},72$, on trouvera que rk, ou $fg = Rr - Rk = 4^{m},92$. Comme je suppose que l'on doit lever

le plan $ACDB$ avec l'équerre, il faudra, pour déterminer les points f, f', calculer les abscisses Ag, Bg', à l'aide des proportions

$$Cc : cA :: fg : gA \quad \text{et} \quad Dd : dB :: fg : g'B,$$
$$\text{ou } 9 : 6 :: 4{,}92 : Ag \qquad 13 : 8 :: 4{,}92 : g'B,$$

desquelles on déduira

$$Ag = 3^m{,}28, \qquad Bg' = 3^m{,}03.$$

Ainsi l'on fera, sur le terrain, $Ag = 3^m{,}28$ et $Bg' = 3^m{,}03$, et l'on élevera aux points g, g' les perpendiculaires gf, $g'f'$ pour obtenir les points f, f', extrémités de la ligne de division ff'.

Si l'on connaissait les angles A et B et les côtés AC, BD, on calculerait par la trigonométrie la ligne AR, puis l'on aurait Rf par la formule qui est analogue à celle (1), savoir,

$$Rf = AR\sqrt{\frac{fRf'}{ARB}}.$$

Cette formule servirait encore pour diviser le quadrilatère proposé $ACDB$ en n parties équivalentes par des parallèles au côté AB. En effet, soit aire $ACDB = Q$, $CRD = T$, et $Rf = z$, $Rg = z'$...etc. On aurait

$$z = AR\sqrt{\frac{T+\frac{Q}{n}}{T+Q}}, \quad z' = AR\sqrt{\frac{T+\frac{2Q}{n}}{T+Q}}, \quad z'' = AR\sqrt{\frac{T+\frac{3Q}{n}}{T+Q}}.$$

65. *Diviser un quadrilatère en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné, et par une droite perpendiculaire à l'un de ses côtés.* Fig. 62.

Lorsque l'on aura déterminé l'aire du quadrilatère $ABDC$, on cherchera chacune de ses parties $ACh'h$, $hh'DB$ supposées entre elles dans le rapport de $m : n$, et l'on aura

$$ACh'h = \frac{m.ACDB}{m+n}.$$

De celle-ci on ôtera le triangle ACc, et le reste sera l'aire $Cchh'$. La question sera donc réduite à diviser par la méthode précédente

le trapèze *CcdD* en deux parties qui soient entre elles dans un rapport connu.

Au moyen des solutions de ces deux derniers problèmes, il n'est aucun polygone que l'on ne puisse partager en parties équivalentes, ou dans d'autres rapports donnés, comme je le ferai voir bientôt.

Fig. 63. 70. *Partager le quadrilatère* ABCD *par une ligne* DE *partant du sommet de l'angle* D, *et de telle sorte que les deux parties* ACDE, EDB *soient dans le rapport de* m : n.

Puisque l'aire *EDB* sera connue et égale à $\frac{n.ACDB}{m+n}$, on aura la base *BE* demandée, en divisant cette aire par la moitié de la hauteur *Dd*.

Fig. 64. 71. *Partager le quadrilatère* ACDB *en deux parties qui soient entre elles* :: m : n, *et de manière que la ligne de division* MN *parte du point* M *donné sur le côté* AB.

L'aire *AMNC* est censée connue, ainsi que celle *ACM*; on connaîtra donc aussi et l'espace triangulaire *CMN* et la droite *CM*. Ainsi la hauteur cherchée du triangle *CMN* sera

$$pN = \frac{CMN}{\frac{1}{2}CM}.$$

On obtiendra le point *N* sur le terrain comme sur le papier, en menant à *CM* la parallèle *NN'*, ensorte que ces deux droites aient *PN* pour distance; alors la seconde droite *NN'* coupera *CD* en un point *N*, qui sera le point demandé.

Fig. 65. 72. *Diviser le polygone* ABCDEF *par une droite* RR' *parallèle à la base* xf.

L'aire *P* du polygone ayant été calculée par la méthode du n° 59, sa moitié sera l'espace *RCDER'*. Or si l'aire *BCDEG* était égale à celle *BAFG*, la base *BG* serait la ligne de division cherchée; mais dans le cas de la figure, on a $BCDEG > \frac{P}{2}$; on pourra donc connaître l'aire *BRR'G*. Ensuite on appliquera la méthode du n° 68 pour diviser le quadrilatère *BCEG* en deux parties *BRR'G*, *RCER'* qui soient entre elles dans un rapport

connu. Ce calcul est trop facile à effectuer pour qu'il soit nécessaire d'en donner un exemple.

On diviserait de même la figure en deux parties équivalentes par une ligne SS' perpendiculaire à Bf, en calculant l'espace $ABCDh$, pour connaître ensuite l'aire du quadrilatère $hDSS'$ et pouvoir diviser le trapèze $DhkE$ comme il a été enseigné ci-dessus. Quant aux longueurs dh, ek, elles peuvent être mesurées sur le terrain, ou calculées par la théorie des lignes proportionnelles; car par cette théorie on a, en concevant par le point F une parallèle à Bf,

$$af : Aa - Ff :: fd : x = \frac{(Aa - Ff) \times fd}{fa},$$

et de là

$$dh = fF + x.$$

On obtiendrait de la même manière la ligne ek.

73. *L'angle* BCA *étant donné sur le terrain, mener* MN *perpendiculaire à* CA, *ensorte que le triangle* CMN *soit équivalent à une aire donnée.* Fig. 66.

Si l'on n'a d'autre instrument qu'une équerre, d'un point quelconque m on élevera mn perpendiculaire à CA; on mesurera ensuite les lignes Cm et mn, puis l'on calculera l'aire Cmn, et l'on aura, à cause des triangles semblables Cmn, CMN,

$$Cmn : CMN :: \overline{Cm}^2 : \overline{CM}^2.$$

Soient, pour exemple, $Cm = 30^m$, $mn = 12^m$ et aire $CMN = 248^{m.q}$, on aura

$$180 : 248 :: 900 : \overline{CM}^2 = \frac{248 \times 90}{18} = \frac{124.90}{9} = 1240.$$

Partant

$$CM = 35^m,22.$$

Ayant CM, on mènera la perpendiculaire MN, et l'aire du triangle CMN sera $= 248^{m.q}$.

Pour vérifier l'opération, on mesurera MN, que l'on devra trouver égale à $\frac{2.248}{35,22} = 14^m,08$ à très-peu-près.

Fig. 67. 74. *Deux terrains étant séparés par la ligne ondulée* AmnpqB, *on propose de remplacer cette ligne par une droite* Ch, *de manière que ces deux terrains aient encore la même étendue superficielle.*

On mènera AC perpendiculaire à XY, et avec l'équerre d'arpenteur ou le graphomètre on abaissera, des points m, n, p, q, B, les perpendiculaires mm', nn', pp', qq', BB'. Par cette opération, si l'espace rps est équivalent à la somme des deux autres $Amnr$, $sqBC$, la droite AC formera évidemment la nouvelle limite. Mais si l'on a $Amnr + sqBC > rps$, l'on construira un triangle AhC équivalent à l'excès de $Amnr + sqBC$ sur rps; c'est-à-dire qu'en désignant cet excès par ε, il faudra que l'on ait $Ah = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}AC}$.

Cette solution extrêmement simple est, comme l'on voit, indépendante de la connaissance des deux surfaces contiguës.

Si les deux terrains adjacens formaient ensemble un triangle, et que l'on demandât que la nouvelle limite fût en même temps la plus courte possible, afin que les deux propriétaires, qui veulent placer leurs habitations aux extrémités de cette ligne, eussent moins de chemin à faire pour se visiter, il est clair que la question serait réduite à celle-ci :

Fig. 52. *Partager un triangle en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné, par une droite* minimum.

Pour résoudre ce problème désignons, comme il est d'usage, par A, B, C les angles d'un triangle, et par a, b, c les côtés opposés à ces angles; et représentons par x la droite cherchée DE, laquelle, par hypothèse, doit diviser ABC en deux parties, de manière que ABC soit à $DBE :: n : 1$.

Si du point B on abaisse sur DE la perpendiculaire BH, et que l'on nomme α l'angle DBH du triangle rectangle DHB, l'angle D de ce triangle sera égal à $100^{gr} - \alpha$, et l'angle E égal à $100^{gr} - B + \alpha$. D'un autre côté, l'aire du triangle DBE est (n° 58)

$$\int.DBE = \frac{x^2}{2} \frac{\sin(100 - \alpha)\sin(100 - B + \alpha)}{\sin B},$$

et celle du triangle ABC étant $=\frac{ac}{2}\sin B$, on a, en vertu de l'énoncé du problème,

$$\int.DBE=\frac{1}{n}.\frac{ac}{2}\sin B;$$

par conséquent de ces deux valeurs d'une même quantité l'on tire

$$x^2=\frac{ac\sin^2 B}{n\cos\alpha\cos(\alpha-B)}.$$

Or, pour que x soit un *minimum*, il faut nécessairement que le dénominateur $\cos\alpha\cos(\alpha-B)=u$ soit un *maximum*. Si donc l'on égale à zéro la différentielle de ce dénominateur, c'est-à-dire, si l'on fait $\frac{du}{d\alpha}=0$, on aura

$$\frac{du}{d\alpha}=-\sin\alpha\cos(\alpha-B)-\cos\alpha\sin(\alpha-B)=-\sin(2\alpha-B)=0;$$

partant

$$\alpha=\frac{B}{2}.$$

Reste à savoir maintenant si cette valeur de α répond réellement à un *maximum*. Pour cela, on cherchera l'expression de $\frac{d^2u}{d\alpha^2}$, et il viendra

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2}=-2\cos(2\alpha-B)$$

Cette expression, en y mettant pour α sa valeur $\frac{B}{2}$, devenant

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2}=-2$$

et étant négative, il s'ensuit que $\alpha=\frac{B}{2}$ donne le *maximum* demandé. Donc enfin la valeur de x déduite de l'équation

$$x=\frac{\sin B}{\cos\frac{1}{2}B}\sqrt{\frac{ac}{n}},$$

est un *minimum*, et, ce qui est remarquable, la droite DE est

perpendiculaire à la ligne BH qui divise l'angle B en deux parties égales. Pour déterminer la position de cette droite, il convient plutôt d'avoir la longueur de $DB = BE = z$. Or le triangle DBE donnant

$$\frac{x}{\sin B} = \frac{z}{\cos \frac{B}{2}},$$

on a, à cause de l'équation précédente,

$$z = \sqrt{\frac{ac}{n}}, \text{ par suite } BH = \cos\frac{B}{2}\sqrt{\frac{ac}{n}};$$

c'est-à-dire que $BD = BE$ est moyen proportionnel entre le côté AB et $\frac{BC}{n}$. La droite cherchée est donc, par là, déterminée de position.

J'ai voulu que la solution précédente fût une application de la méthode des *maximis* et *minimis*; mais le calcul différentiel n'est pas nécessaire ici. En effet, le dénominateur $\cos\alpha\cos(\alpha - B)$ pouvant se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}\cos(2\alpha - B) + \frac{1}{2}\cos B,$$

il est clair qu'il ne peut atteindre son *maximum* que quand $2\alpha - B = 0$.

Voici une autre solution non moins simple, que mon collègue, M. Billy, a obtenue de son côté.

On a

$$DE = DH + HE = BH.\cot D + BH.\cot E$$
$$= BH(\cot D + \cot E);$$

ensuite

$$DE \times BH = 2\,\text{surf. } DBE = \overline{BH}^2(\cot D + \cot E);$$

mais

$$\cot D + \cot E = \frac{\cos D}{\sin D} + \frac{\cos E}{\sin E} = \frac{\sin(D+E)}{\sin D.\sin E},$$

et

$$\sin D.\sin E=\frac{1}{2}\cos(D-E)-\frac{1}{2}\cos(D+E)=\frac{1}{2}\cos(D-E)+\frac{1}{2}\cos B;$$

parconséquent la base DE sera un *minimum*, ou, ce qui est de même, la hauteur BH sera un *maximum* lorsque $D-E=0$, puisqu'alors cos $(D-E)$ sera le plus grand possible; donc le triangle DBE doit être isoscèle.

Ce problème est un de ceux qui sont énoncés dans le 8ᵉ numéro de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*.

Comme il est de règle, en Topographie, que toutes les surfaces doivent se projeter sur un plan horizontal par des perpendiculaires à ce plan, il faudrait avant de diviser un terrain, qui serait situé en pente, en former la projection orthogonale (n° 45), ou, comme le disent les arpenteurs, suivant la méthode de *Cultellation*. Les motifs qui ont déterminé à choisir cette méthode de préférence à celle que l'on nomme *développement*, sont, 1°. parce qu'il serait impossible de faire raccorder les parties d'un plan dont les unes auraient été mesurées dans le sens horizontal, et les autres dans le sens des pentes du terrain; 2°. parce qu'il est reconnu que le produit de la culture n'est pas toujours proportionnel à la surface : en effet un champ placé sur un côteau ne produit pas autant qu'un champ de même superficie et de même qualité situé en plaine. Ainsi, pour faire légalement le partage des terres, il faut, au lieu de les diviser en parties égales, les partager en parties qui soient entre elles en raison inverse de leurs produits.

LIVRE IV.

THÉORIE ET PRATIQUE DU NIVELLEMENT.

Les principes du Nivellement reposant essentiellement sur les lois de l'hydrostatique et la connaissance de la figure de la Terre, et formant par conséquent une des branches importantes de la Géodésie, ainsi que l'on a eu occasion de le voir dans le cours de ce Traité, il m'a paru nécessaire d'exposer plus particulièrement la théorie et la pratique de cette science, vu, d'ailleurs, qu'il existe peu d'Ouvrages où elle soit présentée avec assez d'étendue.

J'ai donné dans ce Livre les démonstrations de quelques formules énoncées dans l'intéressant Ouvrage de M. Busson-Descars, lequel a pour titre : *Essai sur le Nivellement*, et j'ai, de plus, fait l'application du Nivellement topographique au *Calcul des déblais et des remblais*, en suivant la méthode même employée par les ingénieurs militaires et par ceux des ponts et chaussées.

CHAPITRE PREMIER.

Principes du Nivellement.

Équation d'équilibre d'une masse fluide.

75. La science du Nivellement a pour objet de déterminer de combien un point est plus près ou plus éloigné qu'un autre du centre de la Terre: elle est fondée sur la connaissance des lois de l'équilibre des fluides. Quoique ses premiers principes se trouvent exposés d'une manière générale dans la plupart des Traités élémentaires d'Hydrostatique, et que j'en aie déjà fait des applications soit dans le Traité de Géodésie, soit dans ce qui précède, je pense qu'il est à propos de les rappeler ici, pour répandre plus de jour sur le sujet actuel. Je me rapprocherai, à cet effet, de la méthode analytique employée par l'illustre auteur de la Mécanique Céleste.

La propriété caractéristique des fluides consiste en ce que toutes leurs molécules sont parfaitement mobiles entre elles, et qu'elles cèdent à la plus petite force. Il résulte de là que l'équilibre d'une masse fluide ne peut avoir lieu à moins qu'il n'existe pour chaque molécule, entre les forces qui la sollicitent et les pressions que les autres molécules exercent sur elle.

Cela posé, considérons un petit parallélipipède rectangle composé d'une agrégation de molécules fluides. Soient x, y, z les coordonnées rectangles de l'angle de ce parallélipipède, le plus voisin de l'origine des axes, et Δx, Δy, Δz les longueurs des trois arêtes contiguës à cet angle. Soit p la pression qu'éprouve un des points de la face la plus voisine de l'origine des coordonnées, et p' la pression relative à la face opposée et agissant en sens contraire de la première. Si ces pressions étaient constantes dans toute l'étendue des faces sur lesquelles elles agissent respectivement, le parallélipipède, en vertu de la pres-

sion qu'il éprouverait, serait sollicité parallèlement à l'axe des x par une force égale à $(p-p')\,\Delta y.\,\Delta z$; mais la pression exercée sur une molécule étant nécessairement fonction des coordonnées x, y, z de cette molécule, la pression p qui agit dans le sens des x variera en même temps que cette coordonnée. Or p est censée devenir p' lorsque x augmente de Δx; donc, suivant le théorème de Taylor,

$$p'-p=\left(\frac{dp}{dx}\right)\Delta x+\left(\frac{d^2p}{2dx^2}\right)\Delta x^2+\ldots\ldots$$

ou

$$\frac{p'-p}{\Delta x}=\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{d^2p}{2dx^2}\right)\Delta x+\ldots\ldots$$

l'accroissement Δx pouvant être pris aussi petit qu'on voudra.

L'hypothèse de p et p' constantes n'est réellement pas permise; mais elle approchera d'autant plus d'avoir lieu, que les dimensions Δx, Δy, Δz du parallélipipède seront plus petites. Or, à la limite, $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$, $\Delta z=dz$, et pour lors

$$(p-p')\,dy.dz=f,\quad\text{et}\quad p'-p=\left(\frac{dp}{dx}\right)dx;$$

partant,

$$(p-p')\,dy.dz=-\left(\frac{dp}{dx}\right)dx.dy.dz.$$

Supposons maintenant que X, Y, Z soient les trois forces accélératrices qui agissent d'ailleurs sur les molécules fluides, parallèlement aux trois axes x, y, z; et désignons par ρ la densité du parallélipipède élémentaire : son volume sera $dxdydz$, sa masse $\rho.dxdydz$, et le produit de la force X par cette masse, c'est-à-dire, $\rho Xdxdydz=F$, sera la force entière ou la force motrice qui tend à la faire mouvoir. Cette masse sera par conséquent sollicitée parallèlement à l'axe des x, par les deux forces

$$F+f=\left\{\rho X-\left(\frac{dp}{dx}\right)\right\}dxdydz;$$

elle sera de même sollicitée parallèlement à l'axe des y, par les deux forces

$$F'+f'=\left\{\rho Y-\left(\frac{dp}{dy}\right)\right\}dxdydz,$$

et parallèlement à l'axe des z; par

$$F''+f''=\left\{\rho Z-\left(\frac{dp}{dz}\right)\right\}dxdydz.$$

Or, en vertu du principe des *vitesses virtuelles*, si un point est sollicité par un nombre quelconque de forces, et qu'il y ait néanmoins équilibre, la somme

des produits de chaque force par l'élément de sa direction est nulle. Donc, puisque le parallélipipède élémentaire est en équilibre dans la masse fluide, il faut que

$$(F+f)\delta x + (F'+f')\delta y + (F''+f'')\delta z = 0.$$

Substituant pour $(F+f)$, etc. leurs valeurs, et faisant attention que

$$\delta p = \left(\frac{dp}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dp}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dp}{dz}\right)\delta z,$$

on aura

$$\delta p = \rho\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z). \qquad (1)$$

Le premier membre de cette équation étant une variation exacte, le second membre doit aussi en être une; alors de cette condition résultent les équations suivantes aux différentielles partielles,

$$\left(\frac{d.\rho X}{dy}\right) = \left(\frac{d.\rho Y}{dx}\right), \quad \left(\frac{d.\rho X}{dz}\right) = \left(\frac{d.\rho Z}{dx}\right), \quad \left(\frac{d.\rho Y}{dz}\right) = \left(\frac{d.\rho Z}{dy}\right).$$

Effectuant les différentiations indiquées, puis multipliant la première de ces équations par Z, la seconde par $-Y$, la troisième par X, et ajoutant ces produits, on aura

$$X\left[\left(\frac{dY}{dz}\right)-\left(\frac{dZ}{dy}\right)\right] + Y\left[\left(\frac{dX}{dz}\right)-\left(\frac{dZ}{dx}\right)\right] + Z\left[\left(\frac{dX}{dy}\right)-\left(\frac{dY}{dx}\right)\right] = 0; \qquad (2)$$

telle est la condition qui doit avoir lieu entre les forces X, Y, Z, pour que l'équilibre d'une masse fluide soit possible.

A la surface libre du fluide, la valeur de p est nulle, et pour lors $\delta p = 0$; l'équation (1), qui devient, en conséquence,

$$0 = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z, \qquad (3)$$

est donc celle de cette surface.

Pour ne donner que des applications relatives à notre objet, supposons que les molécules fluides soient toutes animées de forces attractives dirigées vers un point fixe pris pour origine; et soit r la distance de ce point à la molécule qui a pour coordonnées x, y, z; on aura, comme l'on sait, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, et pour les cosinus des angles que cette distance r fait avec les trois axes rectangles, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$. Si donc φ est la force qui sollicite la molécule que nous considérons, les composantes de cette force dans le sens de ces mêmes axes seront

$$X = -\frac{\varphi x}{r}, \qquad Y = -\frac{\varphi y}{r}, \qquad Z = -\frac{\varphi z}{r};$$

nous prenons φ négativement, parce que cette force tend à diminuer les coordonnées; de là

$$dX = -\frac{\varphi dx}{r}, \qquad dY = -\frac{\varphi dy}{r}, \qquad dZ = -\frac{\varphi dz}{r}.$$

Substituant toutes ces valeurs dans l'équation (2), on obtient, en effaçant les facteurs communs,

$$x\left[\left(\frac{dy}{dz}\right)-\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]+y\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)-\left(\frac{dx}{dz}\right)\right]+z\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)-\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]=0;$$

mais l'équation $x^2+y^2+z^2=r^2$ donnant

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)=-\frac{z}{y}, \qquad \left(\frac{dz}{dx}\right)=-\frac{x}{z}, \qquad \left(\frac{dx}{dy}\right)=-\frac{y}{x},$$

la précédente, ou, ce qui est de même, l'équation (2) est satisfaite; donc l'équilibre est possible dans le système actuel.

Les valeurs ci-dessus de X, Y, Z étant de même introduites dans l'équation (3), on a, en simplifiant,

$$x dx + y dy + z dz = 0,$$

dont l'intégrale est évidemment

$$x^2+y^2+z^2=C^2.$$

Cette équation étant celle d'une sphère, il en résulte qu'une masse fluide dont les molécules sont sollicitées par des forces φ dirigées vers un centre commun, doit affecter la forme sphérique, pour que l'équilibre puisse exister. Il est visible que l'équation de chaque couche dont toutes les molécules éprouvent la même pression, est aussi celle d'une sphère, parce que pour l'une quelconque de ces couches, on a $\delta p = 0$, comme à la surface du fluide. Les couches qui jouissent de cette propriété se nomment pour cela *couches de niveau*.

Si la Terre était un fluide homogène, et qu'elle ne tournât pas autour de son axe, les directions de la pesanteur, ou les *verticales*, concourraient toutes au centre; ainsi cette planète serait sphérique; mais à cause de son mouvement diurne de rotation et des différentes matières qui la composent, elle a réellement la figure d'un sphéroïde aplati vers les pôles et renflé vers l'équateur. Cependant, vu la petitesse de cet aplatissement, on peut, dans les opérations ordinaires du nivellement, supposer, sans erreur sensible, que la Terre est exactement sphérique. Le seul cas où il soit nécessaire de rejeter cette hypothèse, c'est lorsqu'il s'agit de déterminer les différences de niveau de points fort éloignés les uns des autres : alors les opérations trigonométriques sont les seules qu'il faille employer, pour plus de facilité et d'exactitude (art. 106, Géod.).

Relativement à un fluide pesant de peu d'étendue, les directions de la pesanteur g sont à très-peu-près parallèles; ainsi, pour ce cas l'on a $X=0$, $Y=0$, $Z=-g$. Ces valeurs rendant nul le premier membre de l'équation (2), l'équilibre est possible. Quant à l'équation (3), elle se réduit à $0=-gdz$, et en l'intégrant on a $z=const.$, ce qui signifie que la surface supérieure du fluide en équilibre est plane et parallèle au plan des xy ou au plan horizontal. Les mêmes valeurs de X, Y, Z changent l'équation (1) en celle-ci :

$$\delta p=-\rho g\delta z, \quad \text{d'où} \quad p=-\int\rho g dz.$$

Telle est la valeur de la pression en un point quelconque du fluide. On voit par ce résultat que, pour les fluides incompressibles et homogènes, toutes les molécules qui sont sur un même plan horizontal, sont également pressées, et *vice versâ*. Cette propriété a également lieu lorsque la densité ρ ne varie qu'avec z, ce qui est nécessaire pour l'équilibre des fluides hétérogènes.

Des points de niveau, du niveau apparent et du niveau vrai.

76. On pourrait tirer beaucoup de conséquences remarquables de la théorie précédente; mais ce serait nous écarter de notre sujet, que d'entreprendre de les développer (*). Nous en déduirons seulement la suivante, qui sert de base aux opérations du nivellement; savoir, que *deux ou plusieurs points sont de niveau entre eux, lorsqu'ils appartiennent à une surface semblable et concentrique à celle des eaux stagnantes.*

On parvient immédiatement à connaître les différences de niveau à l'aide des lignes horizontales auxquelles on rapporte les élévations ou les dépressions des objets : ces lignes sont données soit par la perpendiculaire au fil à plomb; soit par le rayon visuel rasant la surface d'un liquide contenu dans un cylindre recourbé et ouvert à ses extrémités; soit enfin par une ligne parallèle à l'axe d'un tube cylindrique de verre rempli en partie d'alcohol ou d'éther, et disposé de manière que la bulle d'air dont la pesanteur spécifique est moindre que cette liqueur, et qui, par cette raison, tend toujours à occuper le point le plus haut de ce tube, soit placée exactement en son milieu.

Un instrument qui donne une ligne horizontale s'appelle *Niveau :*

(*) Voyez d'ailleurs, sur l'Hydrostatique, le *Traité élém. de Mécanique*, par M. Francœur.

on en distingue, par conséquent, de trois espèces différentes, savoir, les *Niveaux à perpendicule*, les *Niveaux d'eau* et les *Niveaux à bulle d'air*.

Un rayon visuel horizontal se nomme *ligne de niveau apparent*, parce qu'il semble en effet que tous les points de cette droite soient de niveau entre eux, quoique cela n'ait pas lieu.

Puisque tous les points de la surface des eaux tranquilles sont à égale distance du centre de la Terre réputée sphérique, il s'ensuit que si le fond d'un canal était horizontal et représenté par fig. 69. AB, les eaux d'une source B couleraient vers A et formeraient autour de ce point une portion de calotte sphérique.

Toute ligne courbe tracée sur la surface de la Terre supposée sphérique, est dite une *ligne de niveau vrai*: tel est, par exemple, l'arc terrestre AD.

Si au point A l'on conçoit une tangente à l'arc AD, la partie BD de la sécante CB sera la hauteur du niveau apparent AB au-dessus du niveau vrai AD. Il est important, dans la pratique du nivellement, d'évaluer cette hauteur, lorsque l'on connaît la longueur de la tangente AB. Or c'est à quoi l'on parvient aisément, en considérant que toute tangente AB est moyenne proportionnelle entre la sécante entière BH et sa partie extérieure BD; on a donc

$$BH : AB :: AB : BD = \frac{\overline{AB}^2}{BH} = \frac{\overline{AB}^2}{2CD + BD},$$

d'où

$$\overline{BD}^2 + 2CD \times BD = \overline{AB}^2.$$

Pour calculer rigoureusement BD, il faudrait résoudre une équation du second degré; mais la hauteur BD est toujours si petite à l'égard du diamètre $2CD$ de la Terre, que la formule précédente peut, sans erreur, appréciable être réduite à

$$BD = \frac{\overline{AB}^2}{2CD}, \text{ ou, pour abréger, } h = \frac{a^2}{2R}.$$

Si on voulait trouver une suite de valeurs approchées de BD, alternativement trop grandes et trop petites, mais de plus en plus exactes, on aurait évidemment, en désignant par h_1, h_2,

h_3... ces valeurs successives,

$$h_1 = \frac{a^2}{2R}, \quad h_2 = \frac{a^2}{2R + h_1}, \quad h_3 = \frac{a^2}{2R + h_2}, \ \ldots \text{ etc.}$$

sachant que le rayon $CD = R = 6366198^m$, ou que le logarithme de $2R = 7{,}1049101$, et connaissant la distance $AB = a$, il est facile de calculer la hauteur h dont il s'agit. Cherchons, par exemple, les hauteurs du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, pour les distances 450 et 1000^m.

La hauteur correspondante à 450^m s'obtiendra au moyen de la formule $h = \frac{a^2}{2R} = \frac{(450)^2}{2R}$; de là

$$\begin{aligned} \log 450 &= 2{,}65321 \\ \textit{idem} &= 2{,}65321 \\ \text{comp. } \log 2R &= 2{,}89509 \\ \log h &= 8{,}20151 ; \quad \text{donc } h = 0^m{,}016. \end{aligned}$$

La hauteur h étant déterminée, on aura celle qui convient à la distance $a' = 1000^m$, par le quatrième terme de la proportion

$$a^2 : a'^2 :: h : h',$$

ou en valeurs numériques,

$$(450)^2 : (1000)^2 :: 0^m{,}016 : h';$$

ainsi $h' = 0^m{,}0785$. Si l'on devait effectuer d'autres calculs de cette espèce, il serait plus simple de comparer à cette dernière hauteur toutes celles à déterminer, parce que la division se ferait sur-le-champ, en déplaçant convenablement la virgule décimale, comme cela est évident.

De l'effet de la réfraction terrestre sur la différence de niveau.

77. On appelle *point de visée* ou *point de mire*, l'un des points visibles d'un corps vers lequel on dirige un rayon visuel. A une distance un peu grande, le point de visée paraît dans un lieu autre que celui qu'il occupe vraiment; cette déviation de l'image

de l'objet, qui est l'effet de la réfraction, se manifeste dans le sens vertical et fait paraître cet objet plus élevé qu'il ne l'est réellement. Quelquefois cependant les lieux apparens des objets sont vus plus bas ou sont déplacés dans le sens latéral; mais ce phénomène est rare, et il a lieu d'ailleurs dans des momens que l'on ne doit pas choisir pour observer (*).

Fig. 6. Il suit de là et de ce qui a été dit (art. 103, Géod.), que si B est un objet terrestre observé du point A, il sera vu en B' dans la direction de la tangente à la courbe décrite par le rayon lumineux AB, et que l'angle $B'AB$ sera celui de la réfraction.

Il est nécessaire de connaître la valeur de la réfraction terrestre à l'horizon, pour pouvoir déterminer la hauteur exacte du point de mire au-dessus du niveau vrai; mais cette réfraction est si variable près de la surface de la Terre, si inconstante dans un même lieu, que l'on ne peut établir aucune règle bien précise à cet égard. A la vérité, elle peut être déterminée immédiatement par l'observation (art. 105, Géod.); mais cela exigeant le concours de deux observateurs, il vaut mieux, pour être dispensé d'en tenir compte, placer l'instrument à égale distance des deux points dont on cherche la différence de niveau. Par ce moyen l'on sera même dispensé d'avoir égard à la différence du niveau apparent au niveau réel. Si, par exemple, OO' est une ligne de niveau apparent, donnée par un instrument placé en A, et que $AO = AO'$ (la ligne OAO' pouvant être brisée en A à volonté); les points O, O', lieux apparens des points de mire o, o', seront nécessairement à égale distance du centre C de la Terre, ou seront de niveau, et l'effet de la réfraction en

Fig. 74.

(*) Dans le Traité de Géodésie, j'ai désigné par *réfraction à l'horizon*, la réfraction que les astronomes appellent *horizontale*, et j'ai appelé, au contraire, *réfraction horizontale* celle qui résulte du déplacement de l'image de l'objet dans le sens horizontal : ces nouvelles définitions me paraissent plus exactes. La théorie des réfractions astronomiques et terrestres a été traitée avec beaucoup de succès par les plus grands analystes. Consultez principalement sur cette matière l'Ouvrage de M. Kramp, le tome IV de la *Mécanique céleste*, et le *Mémoire* de MM. Biot et Arago, sur les forces réfringentes des différens gaz. (*Mém. de l'Institut*, premier semestre, 1806.)

O, ainsi que la hauteur du niveau apparent au-dessus du niveau vrai à ce point, seront respectivement les mêmes qu'en O'. Il suit de là et à cause de $oO = o'O'$, que la différence de niveau des deux points B, B' est en général représentée par $O'B' - OB = o'B' - oB$. Si $o'B' = oB$, les deux points B', B seront de niveau; si, au contraire, $o'B'$ est plus grand ou plus petit que oB, le premier point B' sera plus bas ou plus haut que le second B. Cela est de toute évidence.

Dans le cas, cependant, où il est impossible de procéder de cette manière, on calcule l'effet que la réfraction produit à une distance donnée, en prenant les 8 centièmes de l'angle formé par les verticales des extrémités de cette distance. C'est la valeur de la réfraction moyenne dans notre climat (art. 103, Géod.).

Si on désigne par r l'angle de réfraction, et par C l'angle des verticales dont il s'agit, ou l'*amplitude* de l'arc qui mesure leur distance, on aura par conséquent

$$r = (0{,}08)\, C.$$

Par cette formule, r serait donnée en parties de grade; mais il sera plus commode de l'avoir en mètres. Pour cet effet l'on remarquera que l'angle OAB formé par une corde et une tangente, a pour mesure la moitié de l'angle C. Or, à cause de la petitesse de OAB, OAo, on a à très-peu de chose près,

$$BO : oO :: \text{angle } OAB : \text{angle } OAo,$$

ou en dénotant BO par h et oO par ε,

$$h : \varepsilon :: \frac{C}{2} : (0{,}08)\, C;$$

donc

$$\varepsilon = (0{,}16)\, h;$$

c'est-à-dire que l'excès de la hauteur BO du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, sur l'abaissement oO causé par la réfraction, est égal à cette hauteur multipliée par le nombre constant 0,16. La vraie hauteur du point de mire o, au-dessus du niveau AB, est donc Bo. C'est à l'aide de la méthode du n° 76 et de la formule précédente, que la Table IV a été calculée.

CHAPITRE II.

Description et théorie de quelques instrumens en usage dans le nivellement topographique.

Du niveau d'eau.

78. Nous avons donné dans le chapitre précédent toute la théorie du nivellement, et nous allons passer maintenant à la description des instrumens le plus en usage et les plus exacts.

Fig. 68. Le plus simple de tous les niveaux est le *niveau d'eau.* Il est composé d'un tuyau cylindrique MM' recourbé par les deux bouts de manière à recevoir deux fioles F, F', percées l'une et l'autre aux deux extrémités. Ce tuyau est monté, comme les graphomètres, sur un genou placé au milieu de MM', ou sur une douille P. Le tout est porté sur un pié à trois branches B, B', B''. A l'aide de cette disposition, on est libre d'incliner, d'élever, d'abaisser et de faire tourner l'instrument à volonté. La plupart de ces niveaux sont construits en fer blanc, mais les plus solides et les plus commodes sont en cuivre et ont la forme représentée par la figure.

Lorsque l'on doit se servir de cet instrument, on verse de l'eau dans une des fioles: aussitôt elle se communique à l'autre par la branche MM'; on en verse une quantité suffisante pour remplir les deux fioles à-peu-près aux deux tiers. Alors quand les deux surfaces de l'eau ne sont point agitées, elles sont de niveau en vertu de la propriété des fluides, qui se mettent toujours dans cette situation lorsqu'ils agissent librement, pourvu toutefois qu'il n'y ait aucune bulle d'air dans l'intérieur de la

branche *MM'*. On conçoit en effet que quoiqu'il y ait équilibre entre les deux colonnes *FM*, *F'M'*, les deux surfaces *g*, *g'* ne peuvent être de niveau entre elles, si ces colonnes n'ont pas la même pesanteur spécifique, et c'est ce qui arrive lorsque quelques bulles d'air sont renfermées dans la branche *MM'*. Pour faire sortir ces bulles, on bouche l'une des fioles et l'on penche l'instrument de manière que la colonne fluide soit à-peu-près verticale: alors tout l'air qui peut y être contenu s'élève et s'échappe par l'autre fiole. L'instrument n'a pas besoin d'autre vérification.

A parler rigoureusement, les deux surfaces dont il est question ne sont pas parfaitement de niveau dans tous leurs points, comme le prouve l'expérience. En effet si les fioles cylindriques ont un petit diamètre, les molécules aqueuses en contact avec les parois du verre sont, à la surface supérieure du fluide, plus élevées que celles qui répondent à l'axe de la colonne fluide, et cette surface paraît concave. Ce phénomène est une suite de l'action de la pesanteur et de ce que l'intensité de l'attraction du tube sur le fluide surpasse celle de l'attraction du fluide sur lui-même. (Voyez sur sur ce sujet la *Théorie des tubes capillaires* par M. Laplace, et le *Traité de Physique* de M. Haüy, 2e édition).

Le mercure renfermé dans un tube de verre étroit présente un effet tout contraire, mais MM. Laplace et Lavoisier ont reconnu, dans des expériences qu'ils ont faites sur le baromètre, que la surface intérieure du mercure pouvait perdre entièrement sa convexité, et même devenir concave, en faisant bouillir long-temps ce fluide métallique pour débarrasser la paroi intérieure du tube de la petite couche aqueuse qui la recouvre, et qui par son interposition affaiblit l'action réciproque du verre et du mercure.

Concluons de là qu'un rayon visuel, pour être horizontal, doit raser les bords des onglets ou *ménisques mnp*, *m'n'p'* formés par le fluide et supposés égaux; ou mieux encore être dans un plan passant par les points *n*, *n'* les plus bas des extrémités des colonnes aqueuses. A une petite distance de l'instrument les surfaces latérales des onglets ne paraissent que comme des lignes noires tracées horizontalement sur le verre, et dans ce cas elles indiquent assez exac- Fig. 77.

tement la position d'un plan horizontal. Le niveleur fera donc bien de se placer à cette distance, en disposant son rayon visuel tangentiellement aux parois extérieures des fioles, et dans le plan déterminé par les lignes dont il s'agit, ce qu'il peut évidemment faire de quatre manières différentes.

Il est important que les fioles soient d'un verre bien transparent et de mêmes dimensions; car si l'une était d'un diamètre intérieur beaucoup plus petit que l'autre, les surfaces supérieures du fluide ne seraient pas de niveau entre elles, et pour lors la ligne réputée horizontale serait, en vertu de l'effet capillaire qui se manifesterait sensiblement dans la fiole la plus étroite, un peu inclinée à l'horizon. D'ailleurs les diverses lignes horizontales que l'on obtiendrait en faisant tourner l'instrument sur son pié, ne seraient pas toutes dans un même plan, si la tige n'était pas parfaitement perpendiculaire au rayon visuel.

Pour se convaincre de cette dernière vérité, supposons premièrement que le point A soit à égale distance des axes des deux fioles de mêmes dimensions; que l'instrument incliné sur son pié étant dirigé selon ab, donne l'horizontale HH', et qu'étant dirigé ensuite suivant une autre ligne cd, il donne l'horizontale KK'. Il est évident alors, que les portions de liquide comprises de part et d'autre entre les deux sections elliptiques, auront toujours même volume, et que quelle que soit la position de l'instrument à l'égard des points de l'horizon, toutes les lignes, telles que HH', KK' couperont la première au même point A situé sur l'axe de rotation AP et sur l'horizontale HH'.

Mais si l'une des fioles, celle F' par exemple avait un diamètre intérieur plus petit que l'autre, les volumes résultant de la section d'un plan KK' mené par le point en question, ne seraient plus équivalens, et le plus petit appartiendrait visiblement au tube le plus étroit: ainsi, en supposant que dans celui-ci le niveau ait baissé d'un millimètre mesuré sur l'axe $F'M'$, il sera élevé d'une moindre quantité dans le tube le plus large, puisqu'il doit y avoir égalité de volume, et dans ce cas la ligne KK' coupera nécessairement l'axe de rotation AP au-dessous du point A; d'où l'on doit conclure qu'à moins que les deux tubes de verre n'aient le même

diamètre intérieur, les surfaces horizontales que l'on obtient en faisant tourner l'instrument sur son pié, ne sont pas toutes dans un même plan. Au surplus, quand même il y aurait une inégalité sensible entre les diamètres des deux fioles, pourvu qu'elles ne fussent pas capillaires, cela n'empêcherait pas qu'on pût se servir de l'instrument en toute confiance; il suffirait alors de le placer sur la droite qui joint les deux points que l'on observe successivement, et de le laisser dans cette position.

Il faut bien prendre garde que l'eau, durant l'observation, ne s'échappe du niveau par les jointures des pièces qui le composent; et il est nécessaire, surtout pendant les grandes chaleurs ou pendant les pluies, que l'observation soit de peu de durée à chaque station, afin que l'eau n'ait pas le temps de s'évaporer ou d'augmenter de volume. Ordinairement on la colore pour la rendre plus apparente.

Lorsque l'on transporte le niveau d'eau d'une station à une autre, on bouche une de ses fioles, et on incline cet instrument pour que l'eau ne puisse pas se répandre; car si on est obligé d'en remettre souvent, l'opération du nivellement se prolonge à cause de la nécessité de vérifier si le tuyau ne recèle pas quelques bulles d'air. C'est aussi en bouchant par intervalle une des fioles avec le doigt, et l'ôtant ensuite doucement, que l'on finit par diminuer le balancement de la colonne aqueuse, occasionné par le mouvement donné à l'instrument pour le diriger sur le point de mire.

Description de la mire.

79. Pour savoir où aboutit la ligne horizontale donnée par un niveau, on se sert ordinairement d'une *mire*. C'est un instrument composé d'une perche bien droite, ou d'un linteau de bois divisé en décimètres et centimètres, et le long duquel glisse à volonté une plaque rectangulaire *abcd*, nommée *voyant*. On donne à cette plaque faite de bois mince, ou de gros carton, ou encore mieux de tôle, 25 centim. de largeur sur 16 centim. de hauteur environ, et on la divise par compartimens, ainsi que le représente la figure 73 *bis*. Afin de pouvoir la faire monter ou descendre le long Fig. 73

de la perche, on y attache une petite règle que le manœuvre tient d'une main, et fait mouvoir ou arrête au gré du niveleur.

Quoique l'on soit dans l'usage de faire passer le rayon visuel sur la ligne du milieu du voyant, cependant, lorsque l'on est placé entre les deux points dont on cherche la différence de niveau, on peut prendre constamment pour hauteur, celle depuis le pié de la mire jusqu'au bas du voyant; autrement il faudrait ajouter à chaque hauteur la moitié de celle du voyant. Les mesures sont données par la règle elle-même, qui est divisée ainsi qu'il suit, lorsque l'on veut prendre le milieu du voyant pour la ligne de mire.

En supposant que le voyant ait 16 centimètres de hauteur, le pié de la mire doit être numéroté 8 centimètres, parce que quand le bas du voyant affleure le bas de la perche contre laquelle il est appuyé, la ligne de visée est plus haute précisément de la moitié de la hauteur du voyant.

Il est encore plus simple de marquer sur la règle qui porte le voyant, la ligne de mire, et de tourner les divisions de la perche du côté opposé au niveleur. Le manœuvre, dans ce cas, fait glisser le long de la face latérale de la perche la règle du voyant, traversant deux anneaux de fil d'archal adaptés à la règle même pour l'empêcher de vaciller. Alors la mesure de la hauteur cherchée est donnée immédiatement par le nombre de centimètres compris depuis le pié marqué 0 jusqu'au centre du voyant. Cette mire est d'une construction très-simple; mais voici la description d'une autre beaucoup plus commode à tous égards.

Fig. 73. Le voyant de cette nouvelle mire, auquel on donne 20 centimèt. de hauteur et 30 de largeur, est attaché à l'extrémité d'une règle de 2^{met}, 16, assujétie à couler dans une rainure faite dans la longueur d'une autre règle de bois de sapin ou de noyer bien sec, de 2 mètres de hauteur, et de 25 à 50 millimètres d'équarrissage. L'une des faces latérales de celle-ci est divisée de bas en haut en décimètres et centimètres, et la face opposée est divisée de même, mais les numéros s'y lisent de haut en bas; enfin la règle ou languette qui porte le voyant, est divisée de même de haut en bas, à partir de la ligne *mn*, et en commençant par le n° 20. C'est

ce que l'on comprendra très-aisément à la seule inspection de la figure.

Lorsque l'on se sert de cette mire, il peut arriver 1°. que la ligne de visée soit, à partir du pié, entre 2 et 4 mètres; 2°. entre 20 et 19 centimètres; 3°. au-dessous de 19 centimètres.

Dans le premier cas on haussera le voyant, et quand son milieu sera à la hauteur du rayon visuel, on arrêtera la languette au moyen de la vis de pression *P*. Le nombre de centimètres marqués par la ligne *eg*, sera la hauteur du point de mire au-dessus du pié.

Dans le second cas, quand le milieu du voyant sera dans la direction du rayon visuel, on serrera la vis de pression, et l'on fera usage des divisions latérales qui se lisent en montant.

Dans le troisième cas on retournera la mire de haut en bas, et quand le milieu du voyant aura été amené à l'extrémité du rayon visuel, on comptera les divisions latérales qui se liront de même en montant.

Quoique nous supposions la mire divisée en centimètres, qui sont des parties fort petites, il est utile de se servir quelquefois du double décimètre pour estimer plus aisément les fractions de centimètres, lorsque la ligne de visée tombe entre deux lignes de division de la mire.

Nous n'entrerons pas dans d'autres détails relativement à cet instrument, parce que son usage ne présente aucune difficulté. Cependant nous observerons qu'il importe de le confier à un aide intelligent, lequel puisse, au besoin, écrire lui-même sur un calepin toutes les hauteurs ou *cotes* des points où il est chargé de stationner loin du niveleur.

Du niveau à bulle d'air et à lunette, de Chézy.

80. Le niveau à bulle d'air, si ingénieusement perfectionné par M. Chézy, a obtenu, par son exactitude et sa simplicité, la prééminence sur tous les autres niveaux antérieurement connus, et il est principalement en usage parmi les ingénieurs des ponts et chaussées. C'est pour cette raison que nous ne parlerons point

du niveau d'eau à réflexion, de Mariotte; de celui de Lahire, à lunettes flottantes; de ceux de Picard et Roëmer, à perpendicule; du niveau de Huyghens, etc. On trouvera d'ailleurs la description de ces instrumens dans l'*Encyclopédie méthodique* et dans le *Traité de Nivellement*, de M. Lespinasse. L'estimable auteur du nouvel *Essai sur le Nivellement* a aussi donné la description de deux niveaux à bulle d'air et à lunettes, de son invention, lesquels réunissent l'exactitude à la modicité du prix.

Fig. 70. Les principales pièces qui composent le niveau de Chézy sont: un petit niveau à bulle d'air *N* suspendu à une lunette achromatique et à double tirage; la règle *AB*, aux extrémités de laquelle s'élèvent deux supports traversés par la lunette; la tige *TC* surmontée de deux joues, entre lesquelles peut se mouvoir, autour du centre *C*, l'arc où se réunissent les branches qui supportent toute la partie supérieure de l'instrument; enfin le plateau *mp* attaché au trépié de l'instrument, et au milieu duquel s'implante la tige.

Voici maintenant la description détaillée de chacune des pièces que nous venons de nommer: nous la donnons en faveur de ceux qui n'ont jamais fait usage du niveau actuel.

Du petit niveau à bulle d'air. Ce niveau est composé d'un étui de métal recouvrant en partie un tube de verre fermé hermétiquement et contenant, comme nous l'avons déjà dit, de l'alcohol ou de l'éther, et une petite quantité d'air qui prend vers le milieu du tube une forme plus ou moins oblongue, suivant la température de l'atmosphère. La justesse de cet instrument dépend surtout de sa *sensibilité*. On entend par là la grande facilité avec laquelle la bulle d'air quitte le milieu du tube pour se rendre à son extrémité la plus haute, lorsqu'on donne la plus petite inclinaison à ce tube. M. Chézy a remarqué le premier, que l'instrument a beaucoup de sensibilité quand l'intérieur du tube est travaillé de manière que sa section longitudinale est intérieurement un arc de cercle d'une légère courbure. Cette propriété est une suite de la remarque faite au n° 76. Cependant ce serait un grand inconvénient si la bulle était trop inconstante. On juge qu'elle occupe exactement le milieu du tube, à l'aide des divi-

sions tracées arbitrairement, mais symétriquement, sur les bords des deux ouvertures de l'étui ou sur le tube même.

Le niveau adapté à la lunette est assujéti à tourner autour de la charnière *d*, et on peut l'approcher ou l'éloigner de cette lunette, en faisant tourner dans le sens convenable le piton à vis *c*. On se sert pour cet effet d'un tournevis.

De la lunette. Elle est achromatique, c'est-à-dire qu'elle fait voir les objets nettement terminés et sans iris ou aucunes franges de couleurs empruntées. L'*objectif* est le verre qui doit le premier être traversé par les rayons formant l'image de l'objet, et l'*oculaire* est le verre à travers lequel on regarde directement. On appelle *champ* de la lunette, tout l'espace circulaire que l'œil y découvre.

L'endroit intérieur de la lunette, où viennent se peindre avec beaucoup de netteté les objets extérieurs, se nomme *le foyer*. Pour le déterminer par expérience, on ôte l'oculaire et l'on place dans la lunette un verre dépoli, de manière qu'en regardant un objet extérieur à travers le tube, sa petite image y soit correcte; *et alors c'est là le foyer.*

L'objectif *K* est formé de deux verres de différente espèce; le premier, de verre ordinaire ou de *crown-glass*, est convexe et placé du côté de l'objet; le second, de cristal d'Angleterre ou de *flint-glass*, est concave et placé du côté de l'oculaire, de manière à emboîter la convexité du premier. Les lunettes les plus parfaites sont celles dont l'objectif est composé d'un verre bi-concave de *flint-glass* interposé entre deux verres bi-convexes de *crown-glass*. (*Traité de Phys.* de Haüy, *page* 391, *tome* II.)

L'oculaire *H* est formé de deux lentilles ou verres convexes; l'un est placé tout près de l'ouverture de l'oculaire, et l'autre est à peu de distance de là. Ces deux verres sont entraînés par un petit tuyau additionnel glissant dans un autre petit tuyau mobile logé dans le canon de la lunette.

Le réticule *R* est un petit cercle de métal dont les diamètres rectangulaires sont représentés par deux fils de soie. Le réticule

est construit de telle sorte, que le point *R* d'intersection de ces fils peut, dans le sens perpendiculaire à l'axe de la lunette, changer de position à l'aide du tournevis. Le réticule lui-même peut avancer ou reculer suffisamment dans le sens de cet axe, pour se remettre au foyer de l'objectif, dans le cas où il en serait éloigné.

Quand on veut observer un objet avec la lunette, on tire d'abord le petit tube antérieur *HX*, jusqu'à ce qu'on apperçoive bien les fils du réticule; on tire ensuite le second tube de manière que l'on apperçoive nettement l'objet où l'on vise.

Dans les lunettes à un seul tirage et à deux verres convexes seulement, les objets sont vus renversés et plus clairement que dans celles où ils sont vus droits, à l'aide d'un plus grand nombre de lentilles. Ce renversement de l'image a peu d'inconvénient, parce que l'on est bientôt accoutumé à discerner les objets dans cette situation. L'objectif de ces lunettes est ordinairement adapté à une petite pièce cylindrique mobile enveloppant l'extrémité du canon, tandis que le réticule est fixe dans le sens de l'axe optique. Pour faire usage de cette lunette, on tire le tube qui porte l'oculaire, jusqu'à ce que l'image de l'objet soit bien distincte. Si la chose n'a pas lieu de même pour les fils, ou bien s'ils présentent une *parallaxe*, c'est-à-dire si leur image paraît éprouver du dérangement à l'égard de l'objet, lorsque l'œil regarde par différens points de l'ouverture de l'oculaire, alors on fait mouvoir l'objectif comme il convient, pour en ramener le foyer à l'endroit même des fils.

Des supports. Les supports ou montans *Ae*, *Bf* ont les extrémités de leurs branches coupées circulairement ou en forme de collet, pour recevoir le canon de la lunette. Il est essentiel que ces branches et ce canon soient parfaitement calibrés, afin qu'en faisant tourner la lunette sur elle-même, son axe reste toujours horizontal, s'il a d'abord été mis dans cette position. Un collier ou demi-anneau *ug* est assemblé à charnière à chacun des supports, et embrasse la lunette pour la retenir dans les collets. On l'attache à l'une des branches du support, ou on l'en détache à volonté, au moyen de la vis *g*. La lunette, le niveau, les supports et la règle forment un système assujéti à faire bascule ou à tourner au-

Fig. 71.

tour d'un axe horizontal, à l'aide de la vis sans fin *S* (fig. 70), dont les filets s'engagent dans les dents du râteau circulaire *LL'*.

De la tige. Le bout de la tige traverse le centre *P* du plateau fixé par trois vis sur le trépié. On peut faire tourner l'instrument avec la main, autour de la verticale, pour lui donner ce qu'on appelle le *mouvement prompt;* mais on détruit ce mouvement en serrant la vis de pression *V* qui pousse un petit collier *Z* contre la tige et la rend immobile. L'instrument acquiert un mouvement doux et lent en faisant tourner la vis tangente *y*, (fig. 70) qui engrène avec les dents d'une espèce de bourlet *qy* creusé en gorge. Fig. 72.

Vérification et rectification du niveau à bulle d'air et à lunette, décrit précédemment.

81. La vérification du niveau à bulle d'air, dont nous venons de donner la description, consiste, 1°. à savoir si l'axe optique passant par le centre de l'oculaire et la croisée des fils du réticule, coïncide exactement avec l'axe du cylindre de la lunette; 2°. à s'assurer si cet axe optique est rigoureusement horizontal et parallèle à la ligne de niveau du tube à bulle d'air.

Première partie de la vérification. L'instrument étant établi d'une manière stable sur son trépié, et la vis *X'* du réticule étant supposée au-dessus de la lunette, on visera une ligne horizontale quelconque éloignée de 300 mètres, plus ou moins, et de manière qu'elle soit couverte par le fil horizontal du réticule. Ensuite on fera faire une demi-révolution à la lunette; par ce mouvement, la vis, *X'* qui était en dessus se trouvera en dessous. Alors si, en mirant la même ligne, le fil horizontal ne la couvre pas, c'est une preuve qu'il est trop haut ou trop bas d'une certaine quantité. Pour rectifier ce défaut, on fera parcourir la moitié de l'espace au fil horizontal, à l'aide du tournevis introduit dans la tête de la vis de rappel *X'*, et l'on fera faire l'autre moitié à tout l'instrument, en ramenant le fil horizontal sur la ligne de mire dont il s'agit, ce à quoi l'on parvient en faisant tourner convenablement la vis sans fin *S*. On ramènera la vis Fig. 70.

du réticule en dessus de la lunette, et l'on répétera la correction que l'on vient d'indiquer, jusqu'à ce que le fil horizontal cache la ligne de mire avant et après le retournement de la lunette. Dans cette position, le fil sera dans un plan passant par tous les diamètres horizontaux du canon de la lunette.

Si le fil vertical se meut indépendamment de l'autre fil, à l'aide de la vis *X*, on le rectifiera de la même manière que le fil horizontal, c'est-à-dire qu'après l'avoir fait coïncider d'abord avec une ligne verticale, si la vis se trouve, par exemple, à la droite du niveleur, on l'amènera à la gauche en faisant faire une demi-révolution à la lunette. Il pourra arriver que dans cette nouvelle position il y ait déviation, alors on fera la correction moitié avec la vis de rappel *X*, moitié avec la vis tangente *y*. On répétera cette opération jusqu'à ce que la coïncidence de la ligne verticale et du fil soit parfaite. Dans cet état, ce fil sera dans un plan passant par tous les diamètres verticaux du canon de la lunette; par conséquent l'axe optique ou le rayon visuel passant par le centre de l'oculaire et l'intersection des fils du réticule, se confondra avec l'axe même de la lunette.

Quelque soin que l'on prenne pour rectifier les fils de cette manière, il ne sera pas rare cependant d'observer encore une légère déviation de l'axe optique, quand, après avoir visé un point à la croisée des fils, on aura fait tourner la lunette sur ses supports. Cela tient nécessairement à quelques défauts inévitables de l'instrument, au petit dérangement que la lunette éprouve en la touchant, et à ce que les lignes de visée ne peuvent être amenées exactement au milieu de l'épaisseur des fils. Ce qu'il y a de mieux à faire dans cette circonstance, c'est, lorsqu'on nivelle, de mettre toujours les fils dans la position qui établit la coïncidence requise.

Deuxième partie de la vérification. Il reste à vérifier si l'axe optique de la lunette est horizontal lorsque la bulle d'air est au milieu du niveau. Pour cet effet on mirera un point après avoir amené la bulle au milieu du tube de verre, au moyen de la vis *S* du râteau. Ensuite on retournera l'instrument bout pour bout, en faisant faire une demi-révolution à tout l'instru-

ment, on ouvrira les deux colliers pour ôter la lunette de dessus ses supports : on la retournera elle-même bout pour bout, afin de ramener l'oculaire à soi, et on la replacera sur l'instrument. Cette disposition étant faite, on rappellera, s'il est nécessaire, la bulle au milieu du tube, au moyen de la vis S, puis on visera vers le point de mire. Si le rayon visuel de l'observateur aboutit à ce point en même temps que la bulle occupe le milieu du niveau, c'est une preuve que l'axe optique est horizontal ; dans ce cas, l'instrument est juste et n'a pas besoin d'autre vérification. Si au contraire le rayon visuel passe au-dessus ou au-dessous du point de mire, on approchera ou l'on éloignera doucement de la lunette l'extrémité c du niveau, à l'aide de la vis à piton c ; et après avoir rappelé la bulle au milieu du tube, au moyen de la vis S, on remarquera à quel point aboutit l'axe optique, lequel deviendra le nouveau point de mire ; ensuite on fera faire une demi-révolution à l'instrument, on retournera la lunette bout pour bout et l'on observera si l'axe optique rencontre le même point qu'avant le retournement, autrement on fera la correction précédente, jusqu'à ce qu'enfin l'axe optique aboutisse au même point dans les deux positions de l'instrument. Le lecteur intelligent appercevra aisément la raison de ce procédé.

82. L'instrument étant rectifié, on n'a autre chose à faire, pour s'en servir, que de disposer le mieux possible le plateau mp horizontalement, et de rappeler la bulle au milieu du tube, au moyen de la vis S ; pour lors l'axe optique est horizontal. Mais la question est de savoir si tous les rayons horizontaux que l'on obtient en faisant faire successivement à l'instrument des fractions de tour d'horizon, sont tous dans un même plan horizontal ? Cette circonstance aurait évidemment lieu si le plateau était parfaitement horizontal, et si l'axe optique de la lunette lui était en même temps parallèle, (auquel cas la bulle serait stationnaire au milieu du tube ; mais il ne paraît pas possible d'atteindre jamais ce degré de perfection. M. Busson, dans son intéressant Ouvrage, s'est proposé de son côté cette question, et il est le premier qui ait publié cette remarque curieuse, savoir, que si le plateau est incliné à l'horizon, les différens axes optiques horizontaux dont il s'agit ne sont pas tous dans un même plan horizontal, et

que leur abaissement ou leur haussement est en raison composée de l'angle que le plateau fait avec l'horizon, et de la distance du centre de rotation C à chacun de ces axes optiques. (Page 72, *Essai sur le Nivellement.*) En voici la démonstration.

Fig. 80. Soit PQ le plan du plateau, QPH l'angle qu'il fait avec l'horizon HPH', et AB l'axe optique de la lunette, supposé horizontal ou parallèle à PH. Si par le point C, centre du mouvement vertical de rotation, on fait passer une droite DM perpendiculaire aux horizontales PH, AB, cette droite sera la ligne de plus grande pente du plan $ABPH$, et quelque inclinaison qu'on donne à la lunette, l'angle CDB sera toujours droit. Supposons que toute la partie supérieure de l'instrument ait ce plan vertical pour position initiale, et qu'on l'amène ensuite dans la position CPH', en la faisant tourner autour de la tige CP. La droite CD sera constante de grandeur, mais variera d'inclinaison à l'égard du plan horizontal, et si on rétablit l'horizontalité de la lunette, la ligne $D'M'$ n'en sera pas moins la ligne de plus grande pente du plan CPH'. Il s'agit donc d'avoir la hauteur h du point D' au-dessus d'un plan parallèle à l'horizontal et passant par le point C. Or il est évident qu'en désignant $CD = C'D'$ par m, et l'inclinaison du plan CPH' par θ, on aura $h = m \sin \theta$.

Cela posé, soit α l'inclinaison QPH du plateau, et β l'angle que la trace PH' fait avec l'axe des x, c'est-à-dire avec PH; l'équation du plan CPH' étant en général $Ax + By + z = 0$, en prenant P pour origine des coordonnées, on aura pour l'équation de sa trace verticale CP

$$z = -Ax$$

et pour celle de sa trace horizontale PH',

$$y = -\frac{A}{B}x;$$

mais dans le cas actuel,

$$A = \operatorname{tang}(100^{gr} + \alpha), \qquad \frac{A}{B} = \operatorname{tang}\beta,$$

ainsi

$$A = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}, \qquad B = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}.$$

D'un autre côté, le cosinus de l'angle θ cherché étant $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+1}}$, son sinus est

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2+1}};$$

faisant la substitution des valeurs de A et B, on aura, après les réductions,

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tang^2\alpha\sin^2\beta}}, \quad \text{et} \quad h = m.\frac{1}{\sqrt{1+\tang^2\alpha\sin^2\beta}}.$$

Lorsque $\beta = 200^{gr}$ ou $= 0$, on a $h = m$; si $\alpha = 0$ seulement, on a, quel que soit β, $h = m$; enfin lorsque $\beta = 100^{gr}$ ou 300^{gr}, on a $h = m\cos\alpha$.

Il suit de là qu'il n'y a ni abaissement ni haussement de l'axe optique horizontal pour deux positions diamétralement opposées, et que le *maximum* de haussement ou d'abaissement de cet axe $= m - m\cos\alpha = 2m\sin^2\frac{1}{2}\alpha$. En supposant $\alpha = 33^{gr},33$ et $m = 63^{millim}$, on aura à peu-près, pour le plus grand abaissement dont il s'agit, 8 millim., et il sera d'autant moindre que m et α seront plus petits l'un et l'autre. Il est donc avantageux que la distance du centre C de rotation à l'axe HK de la lunette soit le plus petit possible. Dans la pratique, il n'est pas absolument nécessaire de tenir compte de cet abaissement, parce qu'il est souvent moindre que les erreurs mêmes des observations; mais il faut avoir soin, comme nous l'avons déjà prescrit, de mettre la tige aussi verticalement qu'il est possible. Fig. 70.

Description des niveaux de pente, ou clitomètres.

Du niveau à perpendicule

83. Tout le monde sait que les maçons disposent, dans la bâtisse, les pierres de taille par lits horizontaux, à l'aide du niveau à perpendicule. Cet instrument est composé de trois principales règles, dont deux seulement sont égales. On attache un *fil à plomb CP* au point C, sommet du triangle ABC, et lorsque le niveau Fig. 83.

est posé sur une surface, on remarque à quel point de AB répond le fil vertical. Ensuite on retourne l'instrument de telle sorte que l'extrémité A prenne la place de B, et réciproquement. Si, dans cette nouvelle position, le fil à plomb passe par le même point, l'instrument est exact, c'est-à-dire, les deux points A, B sont de niveau. Si au contraire le fil s'écarte du point dont il s'agit, on partagera l'intervalle en deux parties égales, et le milieu sera l'endroit où devra battre le fil à plomb, pour que les points soient de niveau.

Fig. 84. Cet instrument, monté sur un pié comme les graphomètres, s'emploie aussi dans les levés de détail, pour déterminer la pente d'une ligne ou d'une surface, et c'est pour cette raison qu'on le nomme ordinairement *niveau de pente*, dénomination assez impropre et que l'on pourrait remplacer par celle de *clitomètre*. On le rend propre à cet usage, en adaptant aux extrémités A, B des pinnules, ou bien une alidade pareille à celle des boussoles (n° 54), et en portant sur la ligne AB des parties égales à celles de la perpendiculaire CD. Ordinairement on conçoit $CD = 1000$ parties, et l'on porte de ces parties de part et d'autre du milieu D de la règle AB, que l'on numérote ainsi qu'on le voit par la figure.

Au lieu de graduer de cette manière la ligne AB, on adapte à l'instrument une bande circulaire de métal qui ait 40^{gr} d'amplitude et dont C soit le centre. Il faut remarquer que la graduation est numérotée pour donner immédiatement les distances au zénit. En effet supposons que l'alidade AB étant dirigée sur sur l'objet H, et que les divisions étant à la droite de l'observateur, le fil à plomb tombe sur le nombre 80, la distance apparente de l'objet H au zénit, ou l'angle HAZ sera de 80^{gr}, puisque celui-ci est le complément de HAK ou de $mCD = 100 - 20 = 80$. Il est évident, par conséquent, que l'objet H paraîtrait à l'horizon du lieu de l'observateur, si le fil à plomb battait sur la ligne numérotée 100, et qu'il serait au-dessous de ce plan, si cette ligne passait par un point de division compris entre 100 et 120; mais il n'est pas nécessaire, dans ce cas, d'indiquer si l'objet est au-dessus ou au-dessous de l'horizon, parce que la mesure de la distance au zénit le fait toujours connaître.

Les règles que l'on pose bout à bout pour mesurer les bases sont presque toujours inclinées à l'horizon (art. 64, Géod.). Pour réduire leurs longueurs au niveau de l'une de leurs extrémités, il faut connaître l'inclinaison de chacune : l'équerre dont nous venons de parler la donne immédiatement; mais alors on numérote les divisions depuis o jusqu'à 40^{gr}, de sorte que le milieu de l'arc répond à 20^{gr}; et au lieu d'un fil à plomb on adapte à une branche mobile autour du point C, un petit niveau à bulle d'air, de manière que quand cette bulle est au milieu du tube, la règle soit verticale. Lorsque le niveau est posé sur la règle, on observe les grades marqués par l'index de la branche mobile, on retourne le niveau bout pour bout, on observe de nouveau les grades marqués par l'index, et la moitié de la différence des deux nombres observés est la mesure de l'inclinaison de la règle. Par cette méthode, l'erreur qui affecte le résultat est moindre que si on n'observait qu'une seule fois l'angle. On a soin d'indiquer par le signe + ou le signe — l'angle d'élévation ou de dépression du point B.

Du niveau de pente, de Chézy.

84. Cet instrument, ainsi que M. Chézy l'a fait construire, est composé d'une règle AB d'un pié de long, sur laquelle est posé à demeure un niveau à bulle d'air nn'; et aux deux extrémités A, B s'élèvent perpendiculairement deux pinnules, l'une AF de 48 lignes de hauteur, et l'autre BE de 21 lignes. Ce système est lié à une règle CD par une charnière C, à l'aide de laquelle il est rendu mobile. Vers l'extrémité D de cette règle est un écrou V qui, selon qu'on le fait tourner dans un sens ou dans un autre, comprime ou laisse détendre le ressort à boudin H, et oblige par ce moyen la règle AB de se rapprocher ou de s'éloigner de la règle CD. Au milieu de CD est adaptée une tige gh terminée par une boule qui s'emboîte dans un genou composé de deux coquilles échancrées. En serrant la vis U, les deux coquilles s'appliquent fortement contre la boule, et alors l'instrument ne peut tourner que sur le plan fg, ou autour de la tige du trépié que recèle la douille S. Ce mécanisme est le même que celui des graphomètres, et se conçoit à la seule vue de l'instrument. Fig. 75.

Fig. 76 et 76 *bis*. Entre les montans de la grande pinnule AF se trouve un châssis $R'S$ que l'on rend mobile ou fixe selon le besoin. On le fait monter ou descendre, à l'aide du bouton n, lorsque les pinces sont desserrées au moyen de la vis R; mais si l'on voulait seulement le faire mouvoir insensiblement, on serrerait les pinces k et l'on tournerait dans le sens convenable la vis M. D'un côté de ce châssis sont deux soies ou crins à angles droits, et de l'autre côté, à même hauteur que la soie horizontale, est un petit trou conique L évasé intérieurement, et par lequel le niveleur regarde quand il opère.

Fig. 78 et 79. La petite pinnule BE a aussi son châssis garni de deux fils en croix et d'un petit trou L' placé en face de l'intersection des fils de la grande pinnule. Ainsi quand on observe, la petite ouverture dont il s'agit, l'intersection des fils et le point de mire doivent être sur une même droite. On fait monter ou descendre ce châssis en tournant la vis de rappel E avec un tournevis.

Fig. 76 et 75. *Division des montans de la grande pinnule.* Il convient maintenant d'enseigner la manière de diviser les montans de la grande pinnule, pour obtenir des divisions relatives aux pentes par pié ou aux pentes par mètre. *Nous observerons* à cet égard que puisque la longueur de la règle AB a exactement un pié de long depuis la face extérieure de la petite pinnule jusqu'à la face extérieure de la grande, il ne s'agit que de prendre, à partir de N', des espaces de deux lignes en deux lignes. Ces espaces, comme on le voit, sont partagés en demi-lignes, et les lignes de division N', M', O'... sont numérotées 0, 1, 2, 3, 4, 5..., pour une raison que nous expliquerons bientôt.

Quoique les plus petites parties du montant XT ne représentent que des demi-lignes, on peut estimer exactement des intervalles plus petits. Pour cet effet on construit un *vernier* ou *nonius* sur le châssis, c'est-à-dire que l'on y trace d'autres divisions, de manière que douze parties égales y forment ensemble onze des plus petites parties du montant; par ce moyen chaque partie du vernier représente $\frac{11}{24^{\text{èmes}}}$ de ligne. La première ligne R de division marquée 0 se nomme *ligne de foi*. Lorsque cette ligne

répond exactement à celle qui est de même marquée o sur le montant, il faut que le bord inférieur du châssis soit un peu séparé de la règle AB, parce que sans cela si l'intervalle $R'R$ venait à augmenter par l'effet de la dilatation du cuivre, et que l'intervalle XN' n'augmentât pas de la même quantité, il ne serait plus possible de faire coïncider les lignes $N'o$, Ro. Il est évident qu'en faisant tomber successivement chaque ligne de division du vernier sur une ligne de division du montant, la ligne de foi oR, à compter du point de départ, parcourra $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$.... $\frac{12}{12}$ du plus petit espace du montant.

Supposons maintenant que le côté CM du triangle rectangle CMN soit horizontal; dans ce cas, si CM est d'une toise, et MN d'un pouce, la pente de la droite indéfinie CB sera d'un pouce par toise, et si Cm est d'un pié, mn sera la pente par pié de cette même droite; or, à cause des triangles semblables CMN, Cmn, on a Fig. 66.

$$CM : MN :: Cm : mn,$$

ou

$$72^{\circ} : 1^{\circ} :: 144' : x';$$

donc $x' = 2$ lignes (*). Voilà pourquoi l'intervalle $N'M'$ qui comprend deux lignes n'est marqué que du nombre 1. Ainsi l'intervalle de quatre lignes numéroté 2 indique deux pouces de pente par toise; l'intervalle de six lignes, trois pouces de pente, etc. Il suit de là que le plus petit espace du montant donne le quart d'un pouce ou trois lignes de pente par toise, ou, ce qui est de même, lorsqu'il y a coïncidence entre la deuxième ligne de division du vernier et l'une des lignes du montant, cette coïncidence indique $\frac{3}{12}$ ou $\frac{1}{4}$ de ligne de pente par toise. Si au contraire la troisième ligne de division du vernier coïncidait, elle indiquerait $\frac{2}{4}$ de ligne de pente par toise, et ainsi de suite. Il est donc utile de marquer d'une unité la quatrième division du vernier, de deux unités la huitième division, etc., afin que ces Fig. 76.

(*) Les ingénieurs, avant l'usage des nouvelles mesures, indiquaient les pouces par le signe ", les lignes par ' et les points par ".

mêmes divisions annoncent respectivement par leur coïncidence, 1, 2..... lignes de pente par toise.

Nous venons de supposer que les divisions de l'instrument sont relatives aux anciennes mesures; mais le même instrument peut être gradué de manière à donner en outre la pente par mètre. Fig. 75 et 76. Veut-on, par exemple, marquer sur le montant $X'T'$ 5 millimètres de pente par mètre, la règle AB ayant toujours un pié de long, on fera cette proportion :

$$1^m : 0^m,005 :: AB = 0^m,32484 : x = 0^m,0016242.$$

Telle est la grandeur de chacune des plus petites divisions du montant $X'T'$. Comme il ne serait pas exact de commencer par tracer ces divisions, on multipliera la valeur de x par 64, et le produit $0^m,1039488$ sera la valeur absolue $n'T'$. Ayant fixé cette hauteur, on la partagera d'abord en seize parties égales, et l'on subdivisera chacune de ces parties en quatre autres; alors ces quatre dernières, prises ensemble, répondront à une pente de $4 \times 0^m,005 = 0^m,02$ centimètres par mètre. C'est ce que marque le numéro 2. Par la même raison, 8 espaces répondront à 4 centimètres de pente par mètre; c'est encore ce qu'indique le n° 4. Il en est de même des autres numéros. Quant au vernier, on voit que puisque ses cinq divisions embrassent quatre divisions du montant, chacune des premières comprend un espace relatif à $\frac{0^m,02}{5} = 4$ millimètres de pente par mètre; ainsi la différence d'une division du vernier à une division de la pinnule répond à un millimètre de pente par mètre.

A présent que le système métrique est en vigueur, il conviendra, lorsque l'on construira un niveau de pente, de donner à la règle AB une longueur de trois ou quatre décimètres; plus cette règle sera longue, plus l'instrument sera juste; alors les grandes divisions de la pinnule étant formées de parties exactes du mètre se traceront plus facilement. Pour les numéroter, on se conformera aux considérations précédentes. Si, par exemple, AB était de trois décimètres, il faudrait, pour que les plus grandes divisions du montant $X'T'$ donnassent deux centimètres de pente par mètre, que l'espace $n'm'$ fût de six millimètres; ainsi dans ce cas l'on

écrirait encore 2 sur la deuxième ligne de division zm', et le reste de la construction s'achèverait comme on le voit par l'inspection de la figure.

Vérification et rectification du niveau de Chézy.

85. Lorsque l'instrument aura été placé sur son trépié et que la tige sera verticale, on fera coïncider la ligne o du vernier avec la ligne o de la grande pinnule. Ensuite on amènera la bulle d'air au milieu du niveau nn', au moyen de l'écrou V, et l'on fixera un point dans la direction du trou du châssis de cette pinnule et de la croisée des fils de la petite pinnule. Si, après avoir retourné l'instrument bout pour bout et rappelé la bulle au milieu du tube, le rayon visuel passant par le trou du châssis de la petite pinnule, et par l'intersection des fils de la grande, aboutit au même point de mire qu'avant le retournement, ce rayon visuel sera horizontal et l'instrument sera juste. Mais si ce même rayon aboutit à un autre point, il faudra le ramener vers le premier en faisant la correction moitié en inclinant la tige gh, moitié en élevant ou en abaissant le châssis de la petite pinnule, au moyen de la vis E. On répétera cette opération jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de correction à faire. Fig 75.

L'instrument ayant été rectifié de cette manière, on pourra s'en servir, soit pour niveler un terrain, soit pour en déterminer ou régler les pentes; mais alors on rendra mobile le châssis de la grande pinnule, tandis qu'on laissera fixe celui de la petite pinnule, et cela, afin de pouvoir incliner convenablement le rayon visuel par rapport à l'horizon de l'observateur. C'est ce que nous expliquerons plus amplement par la suite.

CHAPITRE III.

Pratique du Nivellement topographique.

86. La pratique du Nivellement ne présente aucune difficulté, dès-lors que l'on en possède bien la théorie et que l'on s'est rendu familier l'instrument dont on veut faire usage. Cependant, pour achever de remplir le but que nous nous sommes proposés à cet égard, nous entrerons dans tous les détails qui sont de nature à mettre les personnes les moins versées dans la Géométrie, à même d'opérer avec toute l'exactitude possible.

Toutes les fois que par une seule station, ou que par deux *coups de niveau* donnés au même lieu, on peut déterminer la différence de hauteur de deux points, cette détermination est du ressort du *Nivellement simple;* mais lorsque les deux points à niveler sont placés au-delà des limites de l'étendue du rayon visuel, ou bien quand le terrain présente beaucoup d'inégalités ou une pente considérable, on est obligé de lier les deux points proposés par une suite de Nivellemens simples; c'est en cela que consiste le *Nivellement composé.*

Le Nivellement topographique pourrait s'effectuer avec beaucoup de précision, à l'aide du cercle répétiteur; mais il faudrait, comme on l'a vu précédemment, que les points extrêmes du Nivellement fussent liés par un réseau triangulaire, et qu'un des côtés de ce réseau, pris pour base, fût mesuré avec un soin tout particulier, marche qui serait trop lente et trop compliquée, dans tous les cas où l'on a bien moins pour but de connaître les distances itinéraires que les différences de niveau, ainsi qu'il arrive dans la plupart des travaux militaires et civils.

Dans un pays de montagnes et très-accidenté, il est souvent

impossible de déterminer les différences de niveau autrement qu'à l'aide du baromètre. C'est ainsi, par exemple, que M. Ramond, dans les Pyrénées, et le P. Crysologue de Gy, dans les Alpes, ont nivelé les sommités des montagnes les plus remarquables. (Voyez, pour ce qui constitue la théorie et la pratique du Nivellement barométrique, le *Traité de Géodésie* et le n° 12 de cet Ouvrage.)

Du Nivellement simple.

87. *Déterminer la différence de niveau des deux points* A, B, *au moyen du niveau d'eau ou du niveau à bulle d'air.* Fig. 82.

La méthode la plus simple et en même temps la plus exacte, est de placer le niveau *CP* à-peu-près à égale distance de *A* et *B*, afin d'éviter les corrections dues à la réfraction et à la différence du niveau apparent au niveau vrai (n° 77). Mais le point *C* de station peut, sans inconvénient, être hors de la droite *ab*. Supposons donc que cette circonstance ait lieu, et que la mire soit placée verticalement au point *A*. On fera, à l'aide de signes convenus, monter ou descendre le voyant jusqu'à ce que le rayon visuel passe exactement par son milieu; c'est ce que l'on nomme *coup de niveau d'arrière*. Ensuite on lira sur la règle *AM* la hauteur *Aa* ou la cote du point *A*, que l'on écrira sur le brouillon du nivellement. Sans déranger le pié de l'instrument et sans perdre de temps, on fera transporter la mire au point *B*, et l'on répétera la même opération qu'au point *A*, c'est-à-dire que l'on donnera le *coup de niveau d'avant*. Ayant obtenu la hauteur *Bb* ou la cote du point *B*, on l'enregistrera comme la précédente, afin de pouvoir la retrouver au besoin. Si ces deux cotes sont égales, les deux points *A*, *B* seront de niveau; mais si la première cote $Aa = 1^m,536$, par exemple, et la deuxième cote $Bb = 0^m,95$, le point *A* sera plus bas que le point *B*, de la quantité $Aa - Bb = 1^m,536 - 0^m,95 = 0^m,586$. Il est évident que le point qui aura la plus grande cote sera le plus bas.

Dans le cas où il est impossible de placer le niveau ailleurs qu'en *A* ou *B*, en *A*, par exemple, on mesure la hauteur β du point de mire *b* au-dessus du point *B*, ainsi que la distance Fig. 81.

$AB' = k$ des deux termes du nivellement. On mesure de même la hauteur α du rayon visuel au-dessus du point A. Ensuite on calcule ou l'on cherche dans la Table IV, et pour la distance k, la différence h du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, et l'abaissement r du point de mire causé par la réfraction; puis l'on a (n° 77), pour la différence de niveau cherchée,

$$\alpha + (h - \beta - r), \qquad (1),$$

ou

$$\alpha + (\varepsilon - \beta), \quad \text{en faisant} \quad h - r = \varepsilon;$$

Si cette quantité est positive, le point B est plus haut que le point A; mais si elle est négative, le point B est au-dessous du niveau de A.

Lorsque les coups de niveau ne s'étendent pas au-delà de 300 mètres, h et r sont insensibles; ainsi l'on a seulement $(\alpha - \beta)$ pour la différence de niveau des deux points A, B.

Afin de fixer encore mieux les idées à cet égard, soit d'abord

$$\alpha = 1^m,585, \quad \beta = 1^m,208 \quad \text{et} \quad k = 1566.$$

On trouve dans la Table IV que pour la distance 1560 la valeur de..... $\varepsilon' = 0,1605$;

or, pour la partie proportionnelle correspondante

à 6^m on a..... $x = 0,0013$;

donc..... $\varepsilon = 0,1618$.

et la formule (1) devient

$$1,585 + (0,1618 - 1,208) = 0^m,5388;$$

le point B est donc plus élevé que le point A, de la quantité $0^m,5388$.

Soit pour second exemple $\alpha = 1^m,42$, $\beta = 3^m,54$, $k = 1830^m$; on trouvera dans la Table citée, que $\varepsilon = 2209$; partant, la formule (1) donne

$$1,42 + (0^m,2209 - 3^m,54) = -1,8991.$$

Ce résultat étant négatif, il faut en conclure que B est plus bas

que *A* de 1^{m},8991. Pour se passer de la Table dont nous venons de faire usage, on suivra le mode de calcul indiqué aux n°s 76 et 77.

88. *Lever le profil d'un terrain.*

Quand le terrain est inégal entre les points *A*, *B*, et qu'il est utile d'en avoir le profil, on fait placer successivement la mire aux points *A*, *C*, *D*, *E*, *B* pour en avoir les cotes, et l'on mesure en outre la hauteur *Po* de l'instrument supposé placé sur la droite *ab*. Enfin on détermine les distances horizontales *ac*, *cd*, *do*, *oe*, *eb*. Il est d'usage de faire ces distances égales entre elles, lorsque le terrain est légérement ondulé et que les plis des différentes pentes sont peu sensibles. Fig. 85.

Si on a un porte-mire intelligent, on le chargera d'écrire lui-même les cotes sur le registre; on est obligé de prendre ce parti quand on ne peut correspondre avec lui que par signes. Cependant le niveleur ne doit point négliger de recueillir de son côté toutes les mesures; il doit même, s'il en a le temps, faire le figuré du profil, afin de pouvoir s'assurer ensuite s'il règne un accord parfait entre ses notes et celles de son porte-mire.

Le levé d'un profil étant fait, on le rapporte d'après l'échelle adoptée; mais quand les cotes ou ordonnées verticales sont fort petites par rapport aux distances horizontales, on les augmente toutes de la même quantité, afin que l'espace entre la ligne horizontale et celle qui représente le terrain, permette d'écrire plus aisément les hauteurs dont il s'agit. C'est aussi pour cela que l'on rapporte souvent les hauteurs d'après une échelle plus grande que celle dont on fait usage pour fixer les longueurs horizontales: ordinairement on prend l'échelle des hauteurs multiple de celle des longueurs.

89. *Déterminer la différence de niveau des deux points* X, Y, *à l'aide du niveau à perpendicule.* Fig. 84.

En supposant que l'on emploie l'équerre décrite au n° 83, on posera cet instrument sur son trépié, en *X*, et l'on dirigera l'alidade *AB*, tournée à la droite de l'observateur sur la mire placée en *Y*; lorsque le rayon visuel *AH* passera par le milieu du voyant, et que le fil à plomb sera en repos, on comptera le

nombre de parties marquées par ce fil. Ce nombre, diminué de 1000, donnera la distance ED; ainsi le point H sera plus haut que le point D. Si le fil battait entre B et D, le nombre marqué par ce fil, diminué de 1000, serait négatif, ce qui indiquerait alors une dépression. On voit par là l'avantage que l'on tire en numérotant, comme on le voit, les divisions de l'alidade.

Il reste à déterminer la hauteur Hm au-dessus de l'horizontale dm. Soit, par exemple, $ED = 380$ parties, la distance horizontale mesurée $Dm = 150^m$. Les triangles ECD, mDH sont semblables, car ils sont tous deux rectangles l'un en D, l'autre en m; de plus, à cause des parallèles CF, HY, les angles FED, DHm sont aussi égaux. On a donc, en comparant les côtés homologues,

$$CD : DE :: Dm : mH,$$

et en substituant les valeurs numériques

$$1000 : 380 :: 150^m : x = 150 \times 0{,}38 = 57^m{,}0.$$

Les deux lignes CF, HY sont les verticales respectives de deux stations différentes; ainsi, à la rigueur, ces lignes ne peuvent être à-la-fois perpendiculaires à l'horizontale Fm menée par le point D; mais la longueur du rayon visuel AH est toujours si petite à l'égard du rayon de la Terre, que l'hypothèse du parallélisme est admissible. Si on voulait tenir compte de la réfraction, dans le cas où la distance Dm surpasse 300^m, on procéderait comme on l'a vu précédemment.

On fait usage avec la même facilité, du niveau à perpendicule servant à mesurer les distances au zénit. Supposons qu'avec cet
Fig. 6. instrument on ait trouvé 86°.10′ pour la distance au zénit ZAB du point de mire B, observée du point A, et que la distance horizontale $AD = 325^m = K$. L'angle B étant égal à la distance au zénit δ, et le triangle ABD étant à très-peu-près rectangle en D, on a

$$\sin\delta : K :: \cos\delta : DB = K\frac{\cos\delta}{\sin\delta} = K\cot\delta;$$

lorsque δ est moindre qu'un quadrant, BD est positif, et par conséquent le point B est au-dessus de l'horizontale AD. Ce point

est au contraire au-dessous de l'horizon de A, quand δ est plus grand qu'un quadrant.

Quelque soin que l'on prenne pour mesurer avec exactitude la distance au zénit avec le niveau à perpendicule, on est loin d'atteindre le degré de précision que procure le cercle répétiteur. Ce n'est donc que dans le cas où l'on ne vise pas à une très-grande exactitude, qu'il est permis de faire usage de ce niveau. On s'en sert quelquefois avec avantage, lorsque dans les levés de détail on veut connaître à peu de chose près les hauteurs de plusieurs points rapprochés et environnant ceux des stations, afin de pouvoir ensuite former le relief du terrain qu'on a figuré à l'aide de la planchette ou de la boussole.

La formule précédente nous indique que la hauteur ou dépression cherchée est *sensiblement égale* à la distance horizontale, multipliée par la cotangente de la distance au zénit observée. Nous disons *sensiblement égale*, parce qu'il faudrait, pour plus de précision, tenir compte de la réfraction (Géod. 107); mais, nous le répétons, il est inutile d'y avoir égard tant que la distance au point de mire n'excède pas 300^m et que l'on n'emploie pas de bons instrumens à lunettes, ou de préférence le cercle répétiteur.

Pour donner un exemple du calcul de cette formule, soit $K = 246^m$, $\delta = 86^{gr}.30'\ldots$ on aura par logarithmes et en employant seulement cinq décimales, ce qui est suffisant,

$$\begin{aligned} \log 246 &= 2{,}39093 \\ 1.\ \cot(\delta = 86^{gr}.30') &= 9{,}33962 \\ \hline & 1{,}73055 = 53^m{,}77; \end{aligned}$$

ainsi la hauteur relative cherchée $= 53^m{,}77$; cette hauteur étant celle du point de mire B au-dessus du niveau de A. Pour avoir réellement la hauteur du sol du terrain au-dessus de celui de la station, on diminuera BD de la hauteur de la mire, et l'on ajoutera au reste la hauteur de l'instrument. On ferait précisément l'inverse si BD était une dépression.

Il faut bien faire attention que l'on entend par hauteur de la mire, celle depuis le point où aboutit le rayon visuel jusqu'au niveau du terrain, et par hauteur de l'instrument, celle depuis

Fig. 81. le point *D* jusqu'à la ligne *XY*. Si l'on avait placé un signal au point *Y*, ce serait la hauteur de ce signal qui représenterait celle de la mire.

Fig. 82. 90. *Déterminer, au moyen du clitomètre de Chézy, la pente de la droite* AB.

Tout niveau ordinaire pourrait être employé pour résoudre la question actuelle; en effet, en le plaçant entre les points *A*, *B*, et opérant comme au n° 87, on obtiendrait les hauteurs *Aa*, *Bb*, dont la différence serait la pente correspondante à la longueur horizontale *ab*. Donc, si l'on divisait cette différence par la longueur *ab*, le quotient serait la pente par mètre cherchée. Soit, par exemple, $Aa = 2^m,45$, $Bb = 0^m,3$ et $ab = 87^m$; on aura pour la pente par mètre de la ligne *AB*,

$$\frac{2,45 - 0,3}{87} = 0^m,0247.$$

Le niveau de pente de Chézy pourrait être employé de la même manière, puisqu'il donne, si l'on veut, une ligne horizontale; mais dans le cas où la ligne *AB* serait beaucoup inclinée, il est plus commode de procéder ainsi qu'il suit.

Après avoir vérifié et rectifié ce niveau de pente, comme il a été dit n° 85, on le placera au point *A* le plus bas, et l'on tournera la petite pinnule du côté de l'œil, de manière que la face extérieure de cette pinnule réponde au point *A*. On amènera la bulle au milieu du niveau, au moyen de la vis à boudin *V*, et l'on placera verticalement la mire près de cette pinnule, de manière que le milieu du voyant réponde juste au petit trou du châssis. Cela fait, le manœuvre ira mettre le pié de la mire au point *B*, et ensuite l'observateur dirigera son rayon visuel sur la ligne du milieu du voyant fixé invariablement, comme il vient d'être dit. Il sera nécessaire, pour cet effet, que celui-ci élève le châssis de la grande pinnule, afin que le trou de la petite pinnule, la croisée des fils de la grande et le milieu du voyant ne fassent qu'une seule ligne droite. Ensuite il comptera le nombre des divisions comprises entre la ligne marquée o sur le montant, et la ligne de foi ou l'index du vernier. Si la ligne *AB* a la pente

supposée précédemment, l'index du vernier marquera 24,7 millim., c'est-à-dire qu'il tombera au-dessus du n° 2 des grandes divisions $n'n'$ et que la ligne de division du vernier, numérotée 5, sera près de coïncider avec la ligne du montant, située immédiatement au-dessus du n° 4.

Pour voir plus aisément les divisions, on se sert d'une loupe qui grossit les objets, et c'est ce qui donne le moyen de prendre par *estime* les parties de millimètres.

Rien n'empêche de prendre pour station le point B le plus élevé, mais alors le trou du châssis de la grande pinnule devient l'oculaire.

91. *D'un point donné sur un plan incliné, mener une droite dans ce plan qui fasse avec l'horizon un angle donné.*

Examinons d'abord la solution analytique de cette question. L'équation du plan est

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

celles de la droite assujétie à passer par le point donné x', y', z', sont

$$x - x' = a(z - z') \qquad (1)$$
$$y - y' = b(z - z') \qquad (2).$$

Or ces trois équations doivent avoir lieu en même temps, pour que la droite et le plan coïncident; et comme l'angle que cette droite fait avec le plan horizontal est connu, si on le désigne par V on aura

$$\sin V = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}; \qquad (3)$$

de plus, la condition nécessaire pour que cette droite soit parallèle au plan est

$$Aa + Bb + C = 0; \qquad (4)$$

si donc on tirait de ces dernières équations les valeurs de a et b, et qu'on les substituât dans les équations (1) et (2), on aurait celles de la droite cherchée, exprimées en fonction de l'angle donné, mais il est plus élégant d'effectuer le calcul suivant.

L'équation (3) donne.

$$1 + a^2 + b^2 = \frac{1}{\sin^2 V}$$

et devient, en mettant pour a et b leurs valeurs tirées des équations (1) et (2),

$$1 + \left(\frac{x - x'}{z - z'}\right)^2 + \left(\frac{y - y'}{z - z'}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 V}$$

Les mêmes substitutions étant faites dans l'équation (4), on a

$$A\left(\frac{x - x'}{z - z'}\right) + B\left(\frac{y - y'}{z - z'}\right) + C = 0,$$

ou bien, en chassant les dénominateurs et faisant passer tout dans le même membre,

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 - (z - z')^2 \cot^2 V = 0, \qquad (m)$$
$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0. \qquad (n)$$

La première équation de ce résultat est visiblement celle d'un cône droit dont l'axe est vertical, le sommet au point donné x', y', z' et le rayon de la base $= (z - z') \cot V$; la seconde équation est celle d'un plan passant par le même point et coïncidant avec le plan donné. Or l'une et l'autre équation devant s'accorder ensemble, il s'ensuit que la droite cherchée est l'intersection même du plan et du cône dont il s'agit. Le problème que l'on considère est donc en général susceptible de deux solutions.

Passons maintenant aux constructions géométriques qui résultent de cette conséquence.

Fig. 86. Soit XAY le plan de projection horizontal est ZAX le plan de projection vertical, supposé rabattu sur le premier. Soient en outre MB, $M'B$ les traces du plan donné sur chacun de ces plans, et S', S'' les projections du point donné sur le plan $M'BM$, ou celles du sommet du cône vertical dont $GS''G'$ est le plan par l'axe, mené parallèlement au plan coordonné ZAX. Enfin soit RT la trace horizontale de ce plan.

Cela posé, pour trouver les projections des deux droites d'intersection du cône et du plan, on mènera d'abord à volonté un

plan horizontal $N''F''$ au-dessus du sommet S'', et sa commune section avec le plan donné MBM' aura pour projection horizontale $P'N'$, projection que l'on obtient en abaissant du point q une perpendiculaire qp' à l'axe AX, et en menant $p'N'$ parallèle à BM. Ensuite du point S' comme centre et d'un rayon $S'y = \frac{vu}{2}$, on décrira un cercle $xk'y$ qui sera la projection horizontale de la base du cône. Enfin, par le point k' où la droite $p'N'$ coupe la circonférence $xk'y$ on mènera $k'k''$ parallèle à ZY et l'on tirera les droites $S'k'$, $S''k''$ qui seront les projections des communes sections cherchées. Il est évident que si ces deux projections se confondaient, le cône serait tangent au plan, et alors la ligne de contact serait en même temps la ligne de plus grande pente du plan MBM'. Cette construction n'a rien de difficile pour quiconque s'est familiarisé avec les considérations de la Géométrie descriptive.

La solution précédente, quoique très-simple en elle-même, devient encore plus facile sur le terrain. Supposons, par exemple, qu'un ingénieur militaire veuille tracer un chemin d'une seule pente le long d'un glacis considérablement incliné, et que cette pente soit de 35 millimètres par mètre. Il disposera le châssis de la grande pinnule du clitomètre de manière que l'index o du vernier soit vis-à-vis la petite ligne de division, immédiatement au-dessous du n° 4, et lorsque le milieu du voyant aura été placé invariablement à la hauteur du petit trou de la petite pinnule, comme dans le problème précédent. L'ingénieur fera placer la mire suffisamment loin de l'instrument et dans la direction du rayon visuel passant par le trou de la petite pinnule et la croisée des fils de la grande. Ensuite le manœuvre montera ou descendra la mire le long du glacis, jusqu'à ce que le rayon visuel tombe sur le milieu du voyant. Cette coïncidence obtenue, si par le pié de l'instrument et par celui de la mire on tire une droite, elle aura nécessairement la pente demandée (*). On conçoit aisément que quand la pente est ascendante, le trou de la petite pin-

(*) On entend ici par pié de l'instrument, le point du terrain situé directement au-dessous du milieu du niveau à bulle d'air.

nule doit toujours servir d'oculaire, et que lorsque la pente est descendante, c'est au contraire les fils de cette pinnule qui servent d'objectif.

Le cercle répétiteur pourrait remplir le même but, et pour cet effet on calculerait l'angle que la pente proposée fait avec l'horizon. Dans la supposition précédente, la pente ascendante par mètre étant de $0^m,035$, le logarithme de ce nombre $= 8,5440680$, est celui de la tangente de l'angle d'inclinaison cherchée (n° 46); cet angle est donc de $2^{gr}.22'.73''$. Ainsi, après avoir amené la lunette supérieure au point de division marqué zéro sur le limbe, on fixera un point éloigné, on amènera l'axe de la lunette inférieure au même point; ensuite on disposera ce limbe verticalement, on mettra l'index du vernier sur $2^{gr}.22'.73''$, et après avoir calé le grand niveau, c'est-à-dire amené la bulle d'air au milieu du tube que supporte la lunette inférieure rendue fixe à l'égard du limbe, on procédera comme ci-dessus pour faire placer le milieu du voyant de la mire dans la direction du rayon visuel. Cette méthode n'est cependant rigoureusement exacte que quand l'axe optique de la lunette inférieure est parfaitement horizontal en même temps que la bulle d'air est au milieu du tube.

Du Nivellement composé.

Fig. 87. 92. Les points A, G sont supposés si éloignés l'un de l'autre qu'il faut, pour déterminer leur différence de niveau, faire plusieurs stations intermédiaires $M_{(1)}$, $M_{(2)}$, $M_{(3)}$... Dans ce nivellement composé, qui est censé se faire de gauche à droite, chaque nivellement simple s'attache à celui qui le précède immédiatement, par le coup d'arrière qui se donne sur le point auquel on a visé pour donner le coup de niveau d'avant de la station précédente. Par exemple, à la première station $M_{(1)}$ du nivellement composé $ABCD$... le coup de niveau d'arrière fait connaître la cote Aa, celui d'avant donne la cote Bb. A la seconde station $M_{(2)}$, le coup de niveau d'arrière donné au point B où l'on a laissé la mire détermine la cote Bb', et le coup de niveau d'avant fait connaître la cote Cc'. Ainsi l'on voit que le second nivellement simple est lié au premier par les deux côtés du point b.

Il en est évidemment de même du troisième à l'égard du second, et ainsi de suite. Cette manière de procéder établit par conséquent une relation de position entre tous les points *A*, *B*, *C*...*G* du nivellement composé.

S'il n'était pas possible de placer l'instrument entre les deux termes de chaque nivellement partiel, on opérerait comme il est dit au n° 87; et dans ce cas il faudrait prendre pour cote donnée par le coup d'arrière, la hauteur de l'instrument, puis indiquer par la lettre *J* que le niveau a été placé au point même dont on donne la cote.

Lorsque l'on a seulement pour objet de connaître la différence de niveau des termes extrêmes *A*, *G* du nivellement, on dirige de la manière la plus commode la ligne *ABCD*... *G* qui peut être ou ne pas être dans le même plan vertical, et les cotes verticales *Aa*, *Bb*, *Bb'*... sont alors les seules qu'il importe de connaître. Mais si la direction de la ligne du nivellement est commandée par la nature de quelques travaux subséquens, on mesure toutes les distances horizontales *ab*, *b'c'*, ... et les angles que ces lignes peuvent faire entre elles. Ordinairement, en pareil cas, on commence par lever le plan du terrain sur lequel on doit former un projet, et l'on marque par des piquets enfoncés à fleur de terre, la direction de la ligne *ABCD*...*G*, comme lorsqu'il s'agit de construire une route ou un canal. Ces piquets servent aussi de repère pour lier au nivellement fait dans le sens de l'axe du projet, les divers nivellemens en travers que l'on est obligé d'effectuer, afin de mieux assigner la forme du terrain que l'on considère (n° 95).

93. Avant de faire connaître comment on rapporte tous les nivellemens à un même plan horizontal, il convient de déterminer réellement la différence de niveau des points *A*, *G*, en supposant que l'on ait inscrit sur la minute du nivellement les cotes verticales de gauche et de droite, ou les coups d'arrière et ceux d'avant.

D'abord, pour former cette minute, on tire au crayon une ligne droite que l'on divise en autant de parties qu'il doit y avoir de stations dans l'étendue *AG*. On écrit aussi au crayon les cotes des hauteurs, ayant soin de mettre celles données par les coups de niveau d'arrière à la droite des perpendiculaires à la ligne *ag*, et de placer Fig. 88.

les cotes données par les coups de niveau d'avant à la gauche de ces mêmes perpendiculaires. Par ce moyen, les perpendiculaires extrêmes n'auront qu'une cote, mais toutes les autres perpendiculaires en auront deux. Les distances d'une cote à l'autre s'écrivent sur la ligne *ag*, ainsi qu'on le voit par la figure; et aussitôt que l'on est de retour de dessus le terrain, on arrête la minute à l'encre. Il est bon, comme nous l'avons déjà dit, que le niveleur et le porte-mire dessinent, chacun en particulier, la minute du nivellement; mais quand même les deux minutes s'accorderaient en entier, on ne serait pas pour cela en droit de conclure que le nivellement est exact : il faut, pour en faire la vérification complète, niveler derechef et en sens opposé, c'est-à-dire, partir du point *G* pour arriver au point *A* par une suite de nivellemens simples, soit en plaçant successivement la mire aux mêmes points intermédiaires *F*, *E*, *D*, *C*, *B*, *A*, s'il importe d'avoir le profil du terrain, soit en la plaçant ailleurs dans le cas contraire. Le second nivellement, fait pour servir de preuve au premier, est nommé par quelques Auteurs *nivellement réciproque*, et le premier, par rapport au second, est appelé *nivellement direct*. Ces dénominations sont inutiles, parce qu'il suffit d'écrire sur la minute, 1er, 2me... nivellement du point *A* au point *G*, et de prendre un milieu entre tous les résultats que chacun fournit, si l'on doit avoir la même confiance dans chacun de ces nivellemens. Voici maintenant la manière la plus simple d'obtenir ces résultats.

Sur la somme des coups d'arrière on ôte celle des coups d'avant, et le reste est la quantité dont le deuxième terme du nivellement se trouve plus haut ou plus bas que le premier terme, selon que la somme des coups d'arrière est plus forte ou plus faible que celle des coups d'avant. Lorsque ce reste est nul, les deux points *A*, *G* sont de niveau entre eux. Dans le cas de la figure, par exemple, on a

coups d'arrière,	coups d'avant.
2^m, 126	1^m, 948
2 , 360	2 , 445
1 , 588	0 ,
2 , 367	0 , 868
1 , 544	1 , 100
0 , 354	0 , 785
Somme 10 , 339	Somme 7 , 146

Ainsi le point G est au-dessus du niveau du point A, de $10^m, 339 - 7^m, 146 = 3^m, 193$.

La raison de cette règle est facile à apercevoir; car soient α, β les coups d'arrière et d'avant de la première station, α', β' les mêmes quantités relatives à la deuxième station, et ainsi de suite; la hauteur du point B au-dessus du niveau de A sera $\alpha - \beta$; la dépression du point C au-dessous du niveau de B sera $\beta' - \alpha'$; on aura donc évidemment, pour la différence de niveau des points A, G,

$$dN = (\alpha - \beta) - (\beta' - \alpha') + (\alpha'' - \beta'') + (\alpha''' - \beta''') + (\alpha^{IV} - \beta^{IV}) - (\beta^{V} - \alpha^{V}),$$

ou

$$dN = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \alpha^{IV} - \beta - \beta' - \beta'' - \beta''' - \beta^{IV} - \beta^{V};$$

résultat qui confirme la règle énoncée ci-dessus.

94. *La minute d'un nivellement composé étant faite, rapporter ce nivellement à une seule ligne ou à une seule surface de niveau.*

Quoiqu'il semble d'abord que sur la minute du nivellement tous les points A, B, C, D.... du profil du terrain soient rapportés à une même ligne de niveau; l'on s'apperçoit bientôt par les doubles cotes qui accompagnent chaque verticale Bb, Cc, que ces points sont comparés à diverses horizontales, comme dans la figure 87. Il résulte de là que pour trouver la différence de niveau de deux points du profil, il faut, d'après le n° précédent, Fig. 88.

faire non-seulement usage des cotes de ces points, mais encore de toutes celles qui sont intermédiaires; inconvénient qui n'aurait pas lieu si le terrain était rapporté à une seule ligne de niveau, puisqu'alors la différence de hauteur de deux points quelconques serait donnée par la différence même de leurs distances à cette ligne. Pour ramener le nivellement à cet état, on prend une
Fig. 87 et 88. *cote d'emprunt* AX, telle qu'étant substituée à la première *Aa*, la ligne horizontale *XX'* passe au-dessus du point le plus élevé du profil; condition qu'il est toujours facile de remplir, et qui se trouve satisfaite dans notre profil, en écrivant, par exemple, $5^m,000$ au-dessus de la première cote $2^m,126$. Celle-ci se trouvant augmentée de $5,000 - 2,126 = 2^m,874$, il faut nécessairement ajouter cet excès à la cote 1,948, afin de ne pas altérer la différence de cette dernière à la première. On écrira donc 4,822 au-dessus de 1,948.

Maintenant, puisque la nouvelle cote du point *B* est 4^m, 822, sa correspondante $2^m,360$ reçoit une augmentation de $4^m,462$; ainsi, au-dessus de la cote $2^m,445$ on écrira $4^m,907$. La différence des deux nouvelles cotes 4,822 et 4,907 sera donc la même que celle de leurs correspondantes 2,36 et 2,445. Achevant d'opérer de même, on trouvera respectivement pour nouvelles cotes des autres points *D*, *E*, *F*, *G* les nombres

3,319; 1,820; 1,376; 1,807.

Cette opération est très-simple; elle consiste, pour avoir la nouvelle cote du point *B*, à ôter de la cote d'emprunt le premier coup d'arrière, et à ajouter au reste le premier coup d'avant; ensuite, pour avoir la nouvelle cote du point *C*, à ôter de la nouvelle cote de *B* le coup d'arrière correspondant, et à ajouter au reste le coup d'avant du point *C*; ainsi de suite.

Il est très-probable que le calcul ci-dessus fait de cette manière est exact, parce que la différence des nouvelles cotes des points extrêmes *A*, *G* est, comme par la première méthode, 3^m, 193.

Fig. 89. 95. Lorsqu'il est nécessaire de connaître la forme du terrain dans le sens perpendiculaire au nivellement principal, on fait ce que l'on appelle des *nivellemens en travers*. Par exemple, pour former le projet d'une route, il importe de savoir comment le terrain se

comporte à droite et à gauche de l'axe de cette route; et, dans ce cas, il suffit souvent de donner un seul coup de niveau pour déterminer les différens profils du terrain dans le sens dont il s'agit. Ces profils se lient au nivellement en long, en prenant les cotes des points *A*, *B*, *C*, *D* qui entrent déjà dans ce nivellement, et ils se rapportent à la même surface de niveau, en augmentant ou en diminuant d'une même quantité toutes les cotes du même profil en travers. Par exemple, dans le premier profil, la cote du point *A* est 1^{m},546; mais étant rapportée au même plan de comparaison que le nivellement en long, elle doit être de 5^{m},000. Or comme cette nouvelle cote excède la première de 3^{m},454, il faut augmenter les autres cotes du même profil, de 3^{m},454; ainsi, au lieu de

1,855; 1,451; 2,065, on aura 5,309; 4,905; 5,519.

Pareillement, dans le deuxième profil, le point *B* a pour cote donnée par le coup de niveau, 1,655; mais ce point rapporté au plan de comparaison *XX'*, doit avoir pour cote actuelle 4,822; les nouvelles cotes extrêmes de ce profil seront donc 5,010; 5,122; ainsi du reste.

Si l'on voulait former une esplanade sur un terrain qui offrît beaucoup d'inégalités, on serait obligé de faire plusieurs nivellemens en long et en travers. Alors, pour rendre plus simple la décomposition et l'évaluation des solides qui pourraient constituer les *déblais* et les *remblais*, on nivellerait suivant des droites parallèles et perpendiculaires entre elles, et l'on rapporterait ensuite, comme nous venons de l'enseigner, tous les nivellemens à un même plan horizontal : ensuite on les figurerait d'après l'échelle du plan. Mais quelquefois afin de pouvoir coter plus à l'aise, on rapporte les mesures verticales à une échelle plus grande, et l'on adopte même une échelle double ou triple de celle des longueurs pour représenter les cotes de hauteur. Tel est l'usage suivi par les ingénieurs et les architectes.

L'auteur de l'*Essai sur le Nivellement* recommande aux niveleurs de faire servir de mire, lorsque la chose est possible, l'un de points visibles d'une tour, d'un arbre, d'un clocher, ou de

tout autre signal que l'on puisse apercevoir de fort loin, afin que le coup de niveau soit d'une grande étendue. En effet, quoique, en général, les erreurs commises dans une longue suite de nivellemens partiels se compensent en partie, parce que les unes se manifestent en sens contraire des autres, on ne doit pas pour cela négliger de diminuer le nombre des coups de niveau. Mais en adoptant pour signaux les objets désignés ci-dessus, on est souvent obligé de mesurer trigonométriquement les hauteurs du point de mire au-dessus du terrain naturel. Lorsqu'on peut les déterminer à l'aide d'un cordeau, il faut prendre toutes les précautions qui sont indiquées dans l'ouvrage cité.

CHAPITRE IV.

Du Calcul des Terrasses.

Détermination des dimensions des solides dont se composent les déblais et les remblais.

96. On entend par *calcul des terrasses*, l'évaluation des massifs de terre qui se trouvent compris entre la surface du terrain et celle du projet. On décompose d'abord ces massifs en corps plus réguliers, et l'on en cherche les dimensions pour pouvoir ensuite en assigner le volume. Ces dimensions se déduisent tant de la connaissance de la figure du terrain indiquée par les divers nivellemens faits en longueur et en largeur, que de celle des pentes et de la forme du projet.

Dans les arts de construction l'on désigne par *déblai* les terres à enlever, et par *remblai*, celles qu'il s'agit de répandre sur les parties du terrain à exhausser. Il sera seulement question dans ce chapitre, du calcul des déblais et des remblais résultant d'un projet de route; et nous renverrons, pour ce qui concerne les principes de sa construction, *au Programme du Cours de Géométrie descriptive, appliqué à l'Art de l'Ingénieur des Ponts et Chaussées*, par M. Sganzin, inspecteur-général de cet établissement.

Le nivellement en longueur et dans le sens de l'axe de la route est celui d'après lequel l'ingénieur règle les pentes et les parties de niveau, de manière que les remblais compensent les déblais autant qu'il est possible. On a soin de n'admettre que des rampes douces pour la facilité du roulage; mais dans un pays de plaine, on établit presque toujours les routes en terrain naturel.

Les parties constituantes d'une route sont une chaussée solide au milieu, ou un encaissement; un accottement en terre de chaque côté, un peu incliné, afin que les eaux puissent s'écouler vers les bords de la route; deux fossés pour recevoir ces eaux, ou quelquefois deux talus pour soutenir les accottemens.

Lorsque les pentes sont déterminées et tracées sur le profil en long, on dessine le projet sur les profils en travers. Comme tous ces profils sont rapportés à une même surface de niveau, il faut y rapporter de même tous les points du projet. Ce sont les hauteurs de ces points, comprises entre le terrain et le projet, que l'on nomme *cotes rouges*, parce qu'en effet les ingénieurs sont dans l'usage de les écrire au carmin, et de tracer aussi en rouge toutes les lignes de l'ouvrage à construire, afin de les mieux distinguer des lignes du terrain mises en noir.

On appelle *points de sujétion*, ceux par lesquels l'ingénieur est obligé de faire passer le projet, indépendamment de toute considération qui pourrait l'engager à adopter un autre système de tracé. Les points où le projet rencontre le terrain naturel, se nomment *points de passage*, ou *points à zéro :* c'est de leur recherche, ainsi que du calcul des pentes, que nous allons nous occuper.

97. *Connaissant la pente absolue* PM *d'une ligne* AM, *déterminer sa pente par mètre.*

Prenant A pour origine des coordonnées rectangles, et AP pour axe des abscisses, l'équation de la droite AM sera

$$y = px,$$

p étant la pente par mètre. Si donc l'on désigne par x', y' les coordonnées AP, PM censées connues, on aura

$$p = \frac{y'}{x'},$$

c'est-à-dire que la pente par mètre, ou en général la pente par unité de mesure d'une rampe est égale à sa pente absolue divisée par la projection ou la longueur horizontale de cette rampe.

Quand même la droite AM serait rapportée à toute autre ligne $A'P'$ parallèle à l'horizontale AP, cette conséquence en

serait pas moins vraie, puisque l'équation de la droite AM étant alors de la forme

$$y' - \beta = p(x' - \alpha)$$

donnerait

$$p = \frac{y' - \beta}{x' - \alpha}$$

résultat dans lequel $y' - \beta = PM$, et $x' - \alpha = AP$. Ce problème a déjà été résolu numériquement au n° 90.

On désigne les pentes ascendantes par $+$, et les pentes descendantes par $-$, et l'on suppose alors qu'elles sont parcourues de gauche à droite, ou de droite à gauche, selon les cas, ainsi qu'on le verra bientôt.

98. *Connaissant une cote rouge ou hauteur verticale entre une ligne de projet et une ligne de terrain, ainsi que la pente par mètre de l'une et de l'autre ligne, déterminer, dans tous les cas, ce que serait cette hauteur à une distance donnée de la première.*

Soit P la pente absolue ou totale de la ligne de projet AB Fig. 91. et pour une distance x connue, p sa pente par mètre, T la pente absolue de la ligne de terre CD, pour la même distance, t sa pente par mètre; enfin, soit la distance horizontale $HH' = x$, la cote rouge $AC = c$.

Cela posé, si l'on prend pour origine des axes le point C du terrain, l'équation de la ligne CD sera

$$y = tx, \qquad (1)$$

et celle de la rampe AB sera

$$y' = px + c; \qquad (2)$$

on aura donc pour valeur de la cote rouge BD

$$\left.\begin{aligned} y' - y &= (p - t)x + c \\ \text{ou} \quad y' - y &= P - T + c \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ainsi *la cote rouge cherchée est égale à l'excès de la pente*

absolue du projet sur celle du terrain, augmenté de la cote rouge connue.

Pour donner des exemples de la formule (3), soient, 1°.

$$c = 3^m,85, \quad x = 30^m, \quad p = 0^m,035, \quad t = 0^m,15$$

on aura

$$P = 1^m,05, \qquad T = 4^m,5;$$

donc la cote cherchée

$$BD = (p - t)x + c = -3,45 + 3,85 = 0^m,4;$$

2°. soient

$$c = -3^m,2, \quad x = 68^m, \quad p = 0^m,026, \quad t = -0^m,18,$$

on aura

$$P = px = 1^m,768, \qquad T = tx = -12^m,24;$$

donc la cote cherchée

$$BD = P - T + c = 1,768 + 12,24 - 3,2 = 10^m,808;$$

ou bien

$$BD = (p - t)x + c = 14,008 - 3,2 = 10^m,808.$$

Dans la formule précédente, qui est générale, nous avons supposé d'abord que les pentes étaient ascendantes et parcourues dans le sens de la cote rouge donnée à la cote que l'on cherche; mais si l'une de ces pentes ou toutes deux étaient descendantes, il faudrait les prendre négativement, et c'est ce que nous avons fait dans le deuxième exemple ci-dessus. Nous avons supposé de même d'abord que la cote rouge donnée était positive ou supérieure à la ligne du terrain; mais dans le cas contraire, AC ou c doit être prise négativement, et l'on sait toujours par le signe du résultat de l'expression $(p - t)x + c$, si la cote rouge cherchée est positive ou négative. Suivant la figure 91, celle-ci étant positive, on doit en conclure que les deux droites AB, CD ne se rencontrent pas dans l'intervalle HH'; mais si AC était po-

sitive, BD se trouvait négative, comme dans la figure 92, on serait certain qu'il y a *point de passage*. Lorsque cette circonstance se manifeste, on détermine la cote de ce point, en supposant dans l'équation (3) précédente, que $y = y'$: alors on en tire Fig. HK, ou

$$x = \frac{c}{t - p}, \qquad (4)$$

et l'équation (1), en vertu de cette valeur, devient

$$y = \frac{tc}{t - p}, \qquad (5)$$

donc

$$OK = HC - y = b - \frac{tc}{t - p}.$$

Il suit de là que *la distance horizontale de la cote donnée au point de passage est égale à cette cote divisée par l'excès de la pente par mètre du terrain sur celle du projet, en supposant toutes les quantités positives.*

Soient, comme dans le second exemple ci-dessus,

$$c = + 3^m,2, \qquad p = 0^m,026, \qquad t = - 0^m,18,$$

on aura pour la distance cherchée

$$HK = \frac{-3,2}{-0,18 - 0,026} = + 15^m,53.$$

Si l'on voulait trouver $H'K$ par la même méthode, on aurait

$$c = 10,808, \qquad p = - 0,026, \qquad t = 0,18,$$

et pour lors la formule (4) donnerait

$$H'K = \frac{10,808}{0,18 + 0,026} = 52^m,47.$$

Le plus souvent on connaît les cotes rouges extrêmes AC, BD, et la distance horizontale HH', et il s'agit seulement de déterminer HK. Pour cet effet, soient $AC = c$, $BD = -c'$, $HH' = a$, $H'B = \beta$, $H'B = \beta'$, $HC = b$, $HA = b'$, et l'on aura pour

l'équation de CD, l'origine étant au point C,

$$y = \frac{b-\beta}{\alpha} x,$$

pour celle de AB,

$$y' = \frac{b'-\beta'}{\alpha} x' + c.$$

Or au point O l'on a $x = x'$, $y = y'$; égalant donc les seconds membres de ces équations et tirant la valeur de x, on trouvera

$$x = \frac{\alpha c}{(b-b') + (\beta'-\beta)} = \frac{\alpha c}{c+c'}, \qquad (6)$$

c'est-à-dire que *la somme des cotes rouges extrêmes, abstraction faite de leurs signes, est à la distance qui les sépare comme la première cote rouge est à sa distance au point de passage.* C'est à quoi l'on parviendrait directement par la comparaison des triangles semblables AOC, DOB.

Supposons, pour application, que

$$c = 3{,}46, \quad c' = 2{,}25, \quad \text{et} \quad \alpha \text{ ou } HH' = 58,$$

on aura

$$HK = \frac{3{,}46 \cdot 58}{3{,}46 + 2{,}25} = \frac{200{,}68}{5{,}71} = 35{,}14.$$

Toutes les recherches de cette nature sont extrêmement aisées par la simple Géométrie; mais nous avons préféré, pour plus de généralité, déduire les règles précédentes des formules analytiques résultantes de la combinaison des équations de deux droites.

S'il fallait déterminer la ligne de section de deux surfaces dont la génération fût connue, on aurait encore recours à la méthode précédente, et pour cela on supposerait que les deux surfaces sont coupées par plusieurs plans verticaux parallèles, puis l'on opérerait pour chaque section en particulier. De cette manière, il suffit, pour déterminer la commune section de deux plans, d'en trouver deux points, puisque cette ligne est une droite. Cette méthode est d'une application facile, et c'est celle que les ingénieurs emploient dans le calcul des terrasses, quoiqu'elle soit moins élégante que celle qui consisterait à trouver les équations

de projection de la commune section de deux surfaces données par leurs équations, si toutefois la forme du terrain et celle du projet étaient telles qu'elles pussent être représentées chacune par une équation à trois variables.

Observations sur les talus et les raccordemens des alignemens droits.

99. Les talus des terres sont nécessaires pour éviter leur éboulement; ils sont d'autant plus considérables que les terres sont moins compactes ou plus légères. Cependant on les fait moindre dans les déblais que dans les remblais, parce que les terres nouvellement rapportées sont beaucoup moins tassées que celles qui forment le sol depuis longues années. On détermine leur talus ou leur inclinaison après qu'elles ont été jetées au lieu du remblai et abandonnées à elles-mêmes. Cette détermination peut s'effectuer de plusieurs manières qu'il n'est pas difficile d'imaginer: ainsi, en supposant que la hauteur CD des terres soit h et que leur talus BD soit b, leur pente par unité de mesure sera $\frac{h}{b}$, n° 97.

Ici se présentent les mêmes questions à résoudre que relativement aux pentes combinées du projet et du terrain, parce que la connaissance des points à zéro est utile pour évaluer les volumes des déblais et des remblais. Il peut arriver différens cas représentés par les figures 93 et 94; mais chacun a sa solution dans l'équation $x = \frac{c}{t-p}$, en ayant égard aux signes des quantités. Si l'on ne voulait faire usage que des valeurs absolues, on aurait pour la figure 93 $x = \frac{c}{p+t}$, pour la figure 94 $x = \frac{c}{p-t}$,

100. La direction ou l'*alignement* est la projection horizontale de l'axe de la route; les alignemens sont rarement droits en pays de montagnes; mais là, comme en plaine, quand deux alignemens droits forment un angle, on les raccorde par une courbe dont on détermine plusieurs points par les intersections d'alignemens droits. On choisit ordinairement pour courbe de raccordement un arc de

cercle ou de parabole. Voici la manière la plus simple de tracer l'arrondissement parabolique.

Fig. 95. Soient AB, AC les deux alignemens à raccorder par une courbe qui prenne naissance en B et qui s'arrête en C.

Divisez AB et AC en un même nombre de parties égales, et joignez successivement tous les points de la ligne AB en commençant par B, avec tous les points de la ligne AC, en commençant par le point de division 1 de cette ligne; alors les intersections de deux droites consécutives prises dans l'ordre du tracé, seront des points de la courbe de raccordement qui sera une parabole, ainsi que nous allons le prouver.

Prenons pour axe des x la droite AX, qui divise en deux parties égales la droite BC joignant les points donnés, et pour axe des y la droite AY parallèle à BC. Cela posé, si nous supposons que les lignes Mm, $M'm'$ soient deux droites consécutives quelconques, leur intersection N sera un point de la courbe de raccordement. Soient dans ce cas, $MM'=a$, $mm'=b$, on aura, d'après le système de tracé que l'on vient d'indiquer,

$$AM=za,\quad MB=(n-z)a,\quad Am=(n-z+1)b,\quad Cm=(z-1)b,$$

n étant le nombre des parties égales de AB ou de AC. De plus, si l'on fait $AH=p$, $HB=q$, on trouvera aisément que les coordonnées obliques des points M, m, M', m' sont

$$\text{pour le point } M,\ AP=\frac{zp}{n},\quad PM=\frac{zq}{n},$$

$$\text{pour le point } m,\ Ap=\frac{p(n-z+1)}{n},\quad pm=\frac{q(n-z+1)}{n},$$

$$\text{pour le point } M',\ AP'=\frac{(z+1)p}{n},\quad P'M'=\frac{(z+1)q}{n},$$

$$\text{pour le point } m',\ Ap'=\frac{p(n-z)}{n},\quad p'm'=\frac{q(n-z)}{n}.$$

De là la droite Mm, assujétie à passer par les deux points M, m, aura pour équation aux coordonnées obliques,

$$y-\frac{zq}{n}=\frac{q(n+1)}{p(2z-n-1)}\left(x-\frac{zp}{n}\right);\qquad (1)$$

l'équation de la droite $M'm'$ sera pareillement

$$y - \frac{(z+1)q}{n} = \frac{q(n+1)}{p(2z-n+1)}\left(x - \frac{(z+1)p}{n}\right). \quad (2)$$

Maintenant, puisqu'au point d'intersection N les coordonnées x, y sont les mêmes pour les deux droites Mm, $M'm'$, et que les deux équations précédentes sont les seules qui existent entre les trois inconnues x, y, z, il est évident que l'on obtiendra l'équation de la courbe à laquelle appartiennent tous les points N, en éliminant z entre ces deux équations. Afin d'effectuer plus commodément cette élimination, l'on ordonnera par rapport à z les équations dont il s'agit, et l'on aura, toutes réductions faites,

$$z^2 - \frac{ny+q(n+1)}{q}z + \frac{npy(n+1)+nqx(n+1)}{2pq} = 0 \quad (1')$$

$$z^2 + \frac{q(1-n)-ny}{q}z + \frac{npy(-1)+nqx(n+1)-2npq}{2pq} = 0; \quad (2')$$

or en soustrayant ces deux résultats l'un de l'autre, on obtient

$$z = \frac{ny+nq}{2q},$$

et en substituant cette valeur dans l'équation (1') on a

$$npy^2 - 2q^2(n+1)x + pq^2(n+2) = 0. \quad (3)$$

La courbe cherchée est donc une parabole dont le diamètre coïncide avec l'axe des x. Si on prenait le point H pour origine des coordonnées, et qu'on désignât par x' la nouvelle abscisse, on aurait, à cause de $x = p + x'$,

$$npy^2 - 2q^2(n+1)x' - pq^2n = 0. \quad (3')$$

Faisant ici $y = 0$, l'abscisse de l'extrémité du diamètre serait

$$x' = \frac{-pn}{2(n+1)}.$$

La plus petite valeur admissible de n est 2, auquel cas $x' = -\frac{p}{3}$, et n peut croître depuis ce terme jusqu'à l'infini. Or

à cette dernière limite on a $x' = -\frac{p}{2}$; ainsi la parabole qui a le plus grand paramètre répond à $n = 2$, et celle qui aurait le plus petit paramètre répondrait à $x' = -\frac{p}{2}$, ou à $n = \infty$. Jamais, par la méthode graphique exposée, on ne pourra obtenir cette parabole-limite, mais on en approchera d'autant plus que AB et AC contiendront plus de parties.

Voyons maintenant dans quel cas AB et AC sont réellement tangentes à la courbe tracée. Pour cet effet, si l'on prend l'expression $\frac{ydx'}{dy}$ de la soutangente, l'équation (3') donnera, en la différentiant,

$$\frac{dx'}{dy} = \frac{npy}{q^2(n+1)};$$

de là

$$\frac{ydx'}{dy} = \frac{npy^2}{q^2(n+1)};$$

et comme c'est la tangente qui passe par le point B que l'on considère, point dont l'ordonnée $y = q$, on a

$$\text{soutangente} = \frac{np}{n+1}.$$

Donc pour que AB et AC fussent effectivement tangentes à la courbe, ou que l'on eût soutangente $= p$, il faudrait que n fût infini. Cependant, lorsqu'on divisera AC en un grand nombre de parties égales, la courbe ne formera pas de *jarets* sensibles aux points B, C.

On arrondit aussi l'arête de deux pentes consécutives, afin que le passage de l'une à l'autre ne soit point brusque; mais dans le calcul des terrasses, on tient rarement compte de ces petits travaux particuliers, qui ne consistent que dans le remuement de quelques pelletées de terre.

Cubature des solides.

101. Après avoir ramené toutes les cotes verticales d'un nivellement composé, à un même plan horizontal, et déterminé

la forme et les dimensions des solides des déblais et remblais qui naissent de la figure du terrain et de celle du projet, il reste à évaluer les volumes de ces solides.

Afin de rendre simples les opérations numériques, et d'obtenir au moins par approximation les mesures qui ne peuvent être déterminées dans toute la rigueur géométrique, on est convenu de considérer tous ces profils, tant en long qu'en travers d'une route, comme des lignes polygonales, et les polyèdres dont se compose le terrain, comme des corps à *faces gauches* engendrées par une droite qui se meut parallèlement au plan vertical passant par l'axe de la route, et assujétie à s'appuyer en même temps sur les lignes du terrain, données par les profils en travers. Il est des cas, cependant, où cette génération hypothétique serait d'un emploi peu commode. Par exemple, le *problème du défilement* est de nature à être résolu avec beaucoup plus de facilité, en représentant le terrain par des sections horizontales qu'on imaginerait faites à différentes hauteurs au-dessus d'un plan de comparaison. (*Cours de fortification*, par M. Gay-Vernon, n° 181.) On peut à ce sujet se proposer cette question: *Trouver sur le relief d'un terrain, donné par des profils parallèles et perpendiculaires à un axe, tant de points que l'on voudra qui aient la même cote verticale*; mais ce n'est pas ici le lieu d'en donner la solution: je reviens donc à mon objet.

Les solides de terre compris entre deux profils en travers, se décomposent en solides plus réguliers, ayant chacun pour base un triangle, ou un parallélogramme, ou un trapèze; et cette base est toujours plane, parce que les solides sont tous appuyés au projet.

MESURE DU PRISME TRIANGULAIRE.

Il est d'abord démontré dans tous les élémens de Géométrie, Fig. 96. qu'un prisme triangulaire à trois hauteurs inégales a pour mesure le produit de sa base par le tiers de ses trois hauteurs. (*Géom.* de Legendre, *Prop.* 21. *Liv. VI.*) Ainsi appelant B la base de ce prisme, h, h', h'' ses trois hauteurs et V son volume, on a

$$V = B\left(\frac{h+h'+h''}{3}\right). \qquad (1)$$

Il arrive souvent, dans la pratique, que l'une et même que deux des hauteurs sont nulles.

MESURE DU SOLIDE A BASE TRAPÉZOÏDALE.

Fig. 97. Soit $ABCD$ le trapèze servant de base au solide à mesurer, et AB, DC les côtés parallèles. Si l'on suppose que la surface gauche $abcd$ opposée à la base soit engendrée par le mouvement d'une droite ab parallèle au plan vertical $AabB$ et s'appuyant constamment sur les lignes ad, bc, et que $aA' = bB$, $bB' = aA$; $cC = dD$, $dD' = cC$, le solide AC' sera visiblement double du solide proposé, et la base $A'B'C'D'$ sera nécessairement plane. Par conséquent si on mène les diagonales AC, $A'C'$, le plan $AA'C'C$ divisera le solide AC' en deux troncs de prismes triangulaires $ABC\,A'B'C'$, $ADC\,A'D'C'$. Désignant donc respectivement par B', B'' les triangles ABC, ADC, et par h, h', h'', h''' les hauteurs inégales Aa, Bb, Cc, Dd, on aura pour le volume v' du premier prisme,

$$v' = \left(\frac{AA' + BB' + CC'}{3}\right) B' = \left(\frac{2h + 2h' + h'' + h'''}{3}\right) B',$$

et pour le volume v'' du deuxième prisme

$$v'' = \left(\frac{CC' + DD' + AA'}{3}\right) B'' = \left(\frac{2h'' + 2h''' + h + h'}{3}\right) B'';$$

par conséquent le volume cherché du solide $ABCDabcd$ est

$$V = \frac{v' + v''}{2} = \left(\frac{2h + 2h' + h'' + h'''}{6}\right) B' + \left(\frac{2h'' + 2h''' + h + h'}{6}\right) B''. \quad (2)$$

C'est-à-dire qu'après avoir partagé la base de ce solide en deux triangles, par une diagonale quelconque, on prendra pour base de chaque triangle une des bases mêmes du trapèze $ABCD$, puis l'on ajoutera ensemble deux fois les hauteurs qui aboutissent à cette base, et une fois les hauteurs qui aboutissent à l'autre base du triangle; ensuite on prendra le sixième du tout, que l'on multipliera par l'aire du triangle choisi pour base, et le produit sera le volume de chaque tronc de prisme triangulaire : enfin la somme de ces deux prismes sera le volume du corps dont la base est un trapèze.

Ce solide peut avoir une, deux, trois ou quatre hauteurs. Si les quatre hauteurs étaient égales, ou que deux fussent égales sur les côtés parallèles, par exemple, si $h'' = h'''$ et $h = h'$, on aurait simplement

$$V = \left(\frac{h + h' + h''}{3}\right) B' + \left(\frac{h' + h'' + h'''}{3}\right) B'' : \qquad (3)$$

expression qui pourrait encore se simplifier d'après l'une des hypothèses, mais qu'il est tout aussi commode de laisser sous cette forme.

MESURE DU CORPS A BASE PARALLÉLOGRAMMIQUE.

Lorsque les quatre hauteurs du solide précédent étant inégales, la base *ABCD* se change en parallélogramme, on a $B' = B''$, et alors la formule (2) se réduit à

$$V = B\left(\frac{h + h' + h'' + h'''}{4}\right),$$

en désignant par B la base *ABCD*. Ainsi, dans ce cas, il faut multiplier la base par le quart de la somme des quatre hauteurs.

Telles sont les formules employées, à cause de leur simplicité, dans le *calcul des déblais et des remblais*; mais il existe une méthode plus générale et plus exacte pour mesurer les solides à faces gauches; c'est de quoi l'on peut se convaincre en lisant l'Appendice au Calcul intégral de M. Bossut, où l'on trouve en outre des solutions élégantes de plusieurs problèmes intéressans de stéréotomie.

103. Pour terminer par quelques applications, je donnerai ici le *tableau du calcul des terrasses d'un projet de route*, que M. Lomet, *ancien ingénieur en chef des Ponts et Chaussées*, m'avait fait former autrefois pour ma propre instruction, lorsque je me disposais à suivre cette carrière.

La figure 99 représente une partie du profil en long de cette route, et la figure 100 quelques-uns des profils en travers. Tous ces profils sont, comme on le voit, rapportés à une même surface horizontale (n° 94), puisque les cotes des mêmes points du terrain, prises sur l'axe *AD* de la route ont, dans l'une et l'autre figure, la même valeur.

L'épure 100 présente toutes les dimensions des solides composant le déblai et le remblai, de manière que toutes les cotes des hauteurs ou des longueurs qui se lisent dans le sens de *AD*, appartiennent au terrain, et toutes celles qui se lisent dans le sens de *DA* sont les cotes rouges, calculées d'après les règles exposées au n° 98 et après avoir tracé les lignes du projet. Quant aux cotes rouges qui représentent des distances aux points de passage, elles sont écrites de gauche à droite. Par exemple, la cote rouge $1^m,95$, qui est à l'extrémité du premier profil en travers et à la gauche de la route, exprime la distance horizontale comprise entre le pié et la crête du talus du déblai; de même la cote $2^m,61$, qui est à l'extrémité du troisième profil et à droite de l'axe de la route, désigne la largeur horizontale du talus du remblai, ayant $4^m,01$ de longueur, et commençant au point où finit le déblai.

La partie de route comprise entre le premier et le cinquième profil est formée de deux alignemens droits unis par une courbe *BCD* fig. 98 tracée selon la méthode du n° 100. Ordinairement on prend pour distance de deux profils consécutifs en travers, le développement même de la partie de cette courbe qu'ils interceptent. Alors les longueurs des solides situés tant à droite qu'à gauche de l'axe *AD* sont de même des développemens de la courbe de raccordement passant par le milieu de leurs largeurs, et c'est pour cela que l'on nomme ces derniers développemens, *longueurs moyennes* ou *réduites*. Cette méthode de déterminer les dimensions des solides de terre est loin, sans doute, d'être rigoureuse, mais elle est commode et d'une exactitude suffisante dans le calcul des terrasses.

J'observerai encore, pour achever de donner une parfaite intelligence de la fig. 100, 1°. que les profils en travers sont censés rabattus sur le plan horizontal; 2°. que les lignes entièrement ponctuées forment la décomposition des bases des solides en parallélogrammes, ou en triangles; 3°. que les lignes à demi-pleines et à demi-ponctuées représentent les intersections du projet avec la surface du terrain; 4°. enfin que les fossés formés par quatre lignes parallèles ne sont tracés que dans la partie du déblai: c'est ce que l'on voit d'ailleurs parfaitement dans le plan de la route, fig. 98.

TABLEAU d'inscription de divers solides, ou calcul des terrasses d'une partie de route relative à l'épure, fig. 100.

INDICATIONS.	DIMENSIONS.	SUPERFICIE.	CUBE en DÉBLAI.	CUBE en REMBLAI.	OBSERVATIONS.
DU PREMIER AU DEUXIÈME PROFIL.					
Première partie, à droite de l'axe de la route.					
Encaissement. *parallélogramme.*	hauteur $\frac{1}{4}$, $2^m,65$; largeur, $3,90$	$10^m,33$			
Accotement. *parallélogramme.*	hauteur $\frac{1}{4}$, $2,20$; largeur, $5,85$	$12,87$			
Fossé. *parallélogram.* talus intérieur.	hauteur $\frac{1}{4}$, $2,65$; largeur, $0,49$	$1,30$			
Fossé. *parallélogram.* cuvette.	hauteur $\frac{1}{4}$, $3,09$; largeur, $0,97$	$3,00$			
Fossé. *parallélogram.* talus extérieur.	hauteur $\frac{1}{4}$, $2,57$; largeur, $0,49$	$1,26$			
Fossé. *trapèze.* 1re partie.	hauteur $\frac{1}{6}$, $1,14$; largeur $\frac{1}{2}$, $1,15$	$1,31$			
Fossé. *trapèze.* 2e partie.	hauteur $\frac{1}{6}$, $0,93$; largeur $\frac{1}{2}$, $0,68$	$0,63$			
Deuxième partie, à gauche de l'axe de la route.					
Encaissement. *parallélogramme.*	hauteur $\frac{1}{4}$, $2,74$; largeur, $3,90$	$10,69$			
Accotement. *parallélogramme.*	hauteur $\frac{1}{4}$, $2,49$; largeur, $5,85$	$14,57$			
Fossé. *parallélogram.* talus intérieur.	hauteur $\frac{1}{4}$, $3,06$; largeur, $0,49$	$1,50$			
Fossé. *parallélogram.* cuvette.	hauteur $\frac{1}{4}$, $3,54$; largeur, $0,97$	$3,43$			
Fossé. *parallélogram.* talus extérieur.	hauteur $\frac{1}{4}$, $3,04$; largeur, $1,15$	$3,50$			
Fossé. *trapèze.* 1re partie.	hauteur $\frac{1}{6}$, $1,22$; largeur $\frac{1}{2}$, $0,98$	$1,20$			
Fossé. *trapèze.* 2e partie.	hauteur $\frac{1}{6}$, $1,34$; largeur $\frac{1}{2}$, $1,37$	$1,84$			
longueur commune.....		$67,43$ $18,51$	$1248^m,13$		
DU DEUXIÈME AU TROISIÈME PROFIL.					
Première partie, à droite de l'axe de la route.					
Encaissement. 1er *parallélogr.*	hauteur $\frac{1}{4}$, $2,55$; largeur, $0,97$; long. réd....	$2,47$ $19,57$	$48,34$		
Encaissement. 2e *parallélogr.*	hauteur $\frac{1}{4}$, $2,23$; largeur, $2,93$; long. réd....	$6,53$ $19,95$	$130,27$		
			$1426,74$		

INDICATIONS.	DIMENSIONS.	SUPERFICIE.	CUBE en DÉBLAI.	CUBE en REMBLAI.	OBSERVATIONS.
De l'autre part.....	.....	1426^{m},74			
Accotement. *trapèze.* 1re partie.	hauteur $\frac{1}{6}$, 1^{m},33 largeur $\frac{1}{2}$, 4 ,93	3^{m},90			
2e partie.	hauteur $\frac{1}{6}$, 1 ,02 largeur $\frac{1}{2}$, 1 ,97	2 ,01			
	long. réd....	5 ,91 20 ,80	122,93		
triangle.	hauteur $\frac{1}{3}$, 0 ,53 largeur $\frac{1}{2}$, 0 ,96	[illegible] ,51			
Fossé. talus intérieur.	hauteur $\frac{1}{4}$, 1 ,27 largeur, 0 ,49	0 ,62			
cuvette.	hauteur $\frac{1}{4}$, 1 ,74 largeur, 0 ,97	1 ,69			
talus extérieur.	hauteur $\frac{1}{4}$, 1 ,23 largeur, 0 ,49	0 ,60			
triangle.	hauteur $\frac{1}{3}$, 0 ,49 largeur $\frac{1}{2}$, 0 ,68	0 ,33			
	long. comm....	3 ,75 17 ,42	65 ,32		
Parties de l'accotement et du talus. *triangle.*	hauteur $\frac{1}{2}$, 0 ,23 largeur $\frac{1}{2}$, 2 ,26	0 ,52	.....	2^{m},08	
	longueur.....	4 ,01			
Deuxième partie, à gauche de l'axe de la route.					
Encaissement,	hauteur $\frac{1}{4}$, 2 ,43 largeur, 3 ,90	9 ,48	185 ,81		
	long. réd....	19 ,60			
Accotement,	hauteur $\frac{1}{4}$, 1 ,96 largeur, 5 ,85	11 ,47	207 ,84		
	long. réd....	18 ,12			
Fossé. talus intérieur.	hauteur $\frac{1}{4}$, 2 ,40 largeur, 0 ,49	1 ,18	20 ,64		
	long. réd....	17 ,49			
cuvette.	hauteur $\frac{1}{4}$, 2 ,85 largeur, 0 ,97	2 ,76	47 ,86		
	long. réd....	17 ,34			
talus extérieur.	hauteur $\frac{1}{4}$, 2 ,33 largeur, 0 ,49	1 ,14	19 ,60		
	long. réd....	17 ,19			
trapèze. 1re partie.	hauteur $\frac{1}{6}$, 1 ,10 largeur $\frac{1}{2}$, 1 ,37	1 ,51			
2e partie.	hauteur $\frac{1}{6}$, 0 ,73 largeur $\frac{1}{2}$, 0 ,32	0 ,23			
	longueur réduite.....	1 ,74 17 ,05	29 ,67		
DU TROISIÈME AU QUATRIÈME PROFIL, etc. etc.		/	2126 ,41	2 ,08	

LIVRE V.

RÉDUCTIONS DES CARTES ET DES DESSINS, ET IDÉE DE LA CONFECTION DES MÉMOIRES DESCRIPTIFS.

Il n'est aucun ouvrage de Géométrie élémentaire qui ne renferme les principes de la réduction des cartes, puisque cette opération consiste à construire une figure semblable à une autre; mais l'on n'y trouve pas la théorie et l'usage des instrumens propres à faciliter ces réductions. Ce livre sera donc bien moins consacré à rappeler des principes connus, qu'à expliquer la manière de se servir des instrumens dont il s'agit, et à l'aide desquels on agrandit ou l'on diminue toutes sortes de dessins beaucoup plus promptement et plus exactement que par les moyens ordinaires que fournit la Géométrie. Il sera terminé par la série des questions relatives à la rédaction des cahiers topographiques : questions qui indiquent en même temps quels sont les renseignemens à recueillir pour donner une idée précise de la force et des ressources d'un État dont on serait chargé de former la Topographie.

CHAPITRE PREMIER.

Précis de quelques-unes des méthodes graphiques employées pour copier ou réduire les plans.

103. En supposant d'abord qu'il faille copier un plan de même grandeur, on pourra, comme on l'enseigne dans tous les élémens de Géométrie, et après avoir tracé les lignes du cadre, déterminer par intersections les positions des principaux points, c'est-à-dire construire sur la copie des triangles égaux à ceux que l'on imagine ou que l'on trace au crayon sur l'original. Ensuite, pour figurer les lignes courbes, on emploiera la méthode expliquée au n° 49. Lorsqu'il y a un grand nombre de lignes droites, on pourra encore déterminer leurs positions en les concevant prolongées jusqu'aux lignes du cadre, et en marquant ensuite sur la copie les points d'intersection de ces mêmes lignes.

Au lieu d'employer ce moyen qui ne laisse pas d'être fort long, surtout lorsque le plan contient beaucoup de détails, on calque le plan à la vitre, si cela est possible, ou bien l'on dessine d'abord l'original sur du papier verni ou huilé, puis on calque à la vitre cette première copie sur une feuille mince de papier de Hollande, ayant soin toutefois de rectifier au crayon les parties du second dessin qui auraient pu être altérées par cette dernière opération. Mais lorsque les lignes dessinées à l'encre de la Chine sur le papier transparent, ne paraissent pas suffisamment au travers de la copie, on réduit de la mine-de-plomb en poussière très-fine que l'on étale sur le côté du papier transparent, opposé à celui sur lequel on a dessiné, et l'on fixe cette poussière en frottant légèrement avec un morceau de papier ou un petit tampon de linge. On étend sur le

papier à dessiner cette feuille préparée de la sorte, en mettant la partie plombée en contact avec le papier; et enfin on suit avec une pointe à calquer, tous les traits de la première copie, en appuyant assez pour que la mine-de-plomb puisse se déposer sur le papier de Hollande. Par ce moyen, l'on a très-exactement le second calque de l'original.

Supposons maintenant, pour plus de généralité, que les lignes de la copie doivent être à celles de l'original dans le rapport de $m : n$. On construira sur l'original $ABCD$ un grand nombre de petits quarrés tracés légérement au crayon; l'on formera un rectangle $abcd$ semblable au premier, c'est-à-dire de manière que AB soit à $ab :: AC : ac :: m : n$. Et ensuite l'opération sera réduite à figurer dans chaque petit quarré de la copie $abcd$, les objets qui sont dans les quarrés correspondans de l'original, et pour cet effet l'on pourra adopter la méthode des intersections, en réduisant, bien entendu, dans le rapport de $m : n$, toutes les dimensions prises sur l'original. Pour effectuer ces réductions, on fait ordinairement usage de l'*angle réducteur*. Supposons, par exemple, que le triangle ADE soit isoscèle, et que l'on ait fait $AD = AE = m$, puis $DE = n$; alors si $AB = AC$ est une ligne quelconque de l'original, sa réduction sera représentée par la ligne BC. On pourrait aussi rapporter tous les points renfermés dans un quarré, d'après leurs distances à deux des côtés de ce même quarré.

Fig. 101

Fig. 102

Si l'original était trop précieux pour qu'il fût permis d'y tracer le treillis $ABCD$, on le couvrirait d'un papier verni ou d'une glace sur laquelle on aurait tracé ce treillis.

Lorsque les aires des deux figures doivent être dans le rapport de $p : q$, pour lors les quarrés de leurs côtés homologues sont proportionnels à ces mêmes aires, et l'on a, en désignant par A une des lignes de l'original, par a la ligne homologue de la copie,

$$p : q :: A^2 : a^2, \quad \text{d'où} \quad a = \sqrt{\frac{q}{p}}\, A^2.$$

Ainsi a serait moyen proportionnel entre A et $\frac{q}{p} A$.

Fig. 103 Voici une construction géométrique qui résout cette dernière question. Sur AB comme diamètre égal à $p + q$, on décrira une demi-circonférence, et de l'extrémité F du segment $AF = p$, on élevera FD perpendiculaire à AB, puis l'on mènera les droites indéfinies DAH, DBK. Alors les quarrés des cordes AD, BD étant dans le rapport des segmens AF, BF ou de $p : q$ (*Géom.* de Legendre, *Liv. III, Prob.* 12), il est clair que si l'on prend DH égal à une ligne quelconque de l'original, et que par le point H on mène HK parallèle à AB, la droite DK sera la ligne homologue de la copie.

Il est encore plus commode de construire d'avance l'échelle de la copie, et d'en faire usage dans les petits détails, pour réduire les distances prises sur l'original et comparées avec son échelle. Cette opération est d'autant plus facile pour les dessins relatifs aux services publics, que leurs échelles ont entre elles des corrélations fixes, ainsi qu'on le voit par le cinquième tableau qui est à la fin de cet Ouvrage; mais il n'arrive presque jamais alors que l'on ait à réduire isolément des dessins, si ce n'est pour les réunir lorsqu'ils représentent des objets qui sont de nature à pouvoir se grouper, comme les détails de machines, d'instrumens, ou ceux qui forment la Topographie d'un pays représenté sur plusieurs feuilles et d'après différentes échelles.

Ces diverses méthodes de copier ou de réduire les cartes, et qui sont simples en elles-mêmes, sont cependant à-peu-près impraticables pour les dessins qui présentent une grande variété de contours et de nombreux détails, tant à cause de la multiplicité des opérations qu'ils exigent, que par la longueur du temps qu'il faut y sacrifier. Il est donc utile de faire connaître les moyens de suppléer à ces méthodes graphiques: c'est à quoi nous allons nous attacher dans le chapitre suivant, en nous bornant toujours à parler du tracé géométrique des lignes.

CHAPITRE II.

Théorie et usage des instrumens propres à copier ou à réduire les dessins et les plans.

Du Pantographe.

104. Le *Pantographe*, comme l'indique l'étymologie grecque, est un instrument qui sert à tracer ou peindre toutes sortes de dessins. Il est composé de quatre règles d'ébène *EF*, *EK*, *AB*, *BD*, égales deux à deux et assemblées sur leur plat par des tourillons en cuivre *A*, *B*, *D*, *E* qui les traversent d'outre en outre, et qui sont garnis de têtes à écrou, afin de pouvoir rendre le jeu des règles aussi libre qu'on le desire. Cet assemblage est tel que la figure *ABDE* forme toujours un losange, soit que l'on écarte ou que l'on rapproche l'une de l'autre les plus grandes règles *EF*, *EK*. L'instrument peut se mouvoir sur une table unie, avec une extrême facilité, à l'aide de petites roulettes placées en *F*, *E*, *K*. Le long de la règle *AB* est une ouverture qui permet de placer un pivot *P* en un point quelconque de cette règle. Ordinairement ce pivot se visse dans une plaque de plomb garnie à ses quatre angles de pointes fines et courtes, lesquelles en s'insinuant dans la table à dessiner, empêchent le système de se déranger quand la position du pivot est déterminée convenablement. On conçoit bien que pour rendre aigu le plus possible l'angle *E*, le pivot ne peut approcher plus près du tourillon *B* que du point *H*. Fig. 104

On est dans l'usage de placer en *K* et à une distance $EK=2AH$ du tourillon *E*, un calquoir adapté à une boîte mobile, mais que l'on rend fixe au moyen d'une vis de pression. Alors

on met en C un porte-crayon adapté de même à une boîte à coulisse que l'on fait avancer ou reculer jusqu'à ce que le porte-crayon C, le pivot P et le calquoir K soient en ligne droite. Telle est la disposition qu'il faut toujours donner à ces trois pièces, pour pouvoir se servir utilement du pantographe. Ce porte-crayon est une petite tige cylindrique qui s'insinue dans une sorte de gaîne ou canon, et qui peut s'élever ou s'abaisser au gré du dessinateur, lequel, pour cet effet, tire ou lâche un fil attaché à ce porte-crayon et passant dans la gorge d'une petite poulie supérieure dont l'axe répond en E.

Il est essentiel que le crayon soit bien centré ; or, c'est ce que l'on reconnaît lorsqu'en le faisant tourner dans son canon il ne trace qu'un point. On augmente ou l'on diminue sa pression sur le papier, en mettant ou en ôtant des grains de plomb dans le petit vase qui sert de couronnement au porte-crayon.

Afin d'éviter au dessinateur la peine de chercher sur les règles AF, AB les points où il faut fixer le pivot et le crayon, pour obtenir de l'instrument la réduction qu'il desire, le constructeur divise les règles suivant les principes que nous allons exposer.

105. Il résulte de la construction de l'instrument que, quelque position qu'on lui donne, les trois points C, P, K une fois disposés en ligne droite restent constamment dans cet état; ainsi les côtés des triangles ECK, ACP seront toujours proportionnels, et à cause de cette proportionnalité, il est évident que les points mobiles K, C décriront des figures semblables.

Cela posé, soient les constantes $AE = a$, $EK = 2AH = b$, et les variables $AC = x$, $AP = y$, on aura, en vertu de la propriété ci-dessus,

$$\frac{PC}{PK} = \frac{AC}{AE}, \qquad \frac{AP}{PC} = \frac{EK}{CK};$$

et si l'on suppose que les traits de la copie dessinée par le crayon C soient à ceux de l'original $:: m : n :: PC : PK$, ces équations fourniront les deux valeurs suivantes:

$$x = \frac{am}{n}, \qquad y = \frac{bm}{m+n}.$$

On conclut de là, 1°. que pour que les traits de la copie soient de même grandeur que ceux de l'original, auquel cas $m = n$, il faut que

$$x = a, \qquad y = \frac{b}{2};$$

2°. que pour que les traits de la copie en soient la moitié, on doit avoir

$$x = \frac{a}{2}, \qquad y = \frac{b}{3};$$

3°. que pour que les traits de la copie en soient le tiers, il faut que

$$x = \frac{a}{3}, \qquad y = \frac{b}{4},$$

et ainsi de suite.

Les nombres $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc. qui se trouvent marqués sur la plupart des pantographes, devraient donc exprimer naturellement ces rapports entre la copie et l'original; mais il est assez bizarre qu'ils signifient au contraire que quand le pivot et le crayon sont sur le même numéro de la graduation, les traits de la copie sont égaux à ceux de l'original moins $\frac{1}{3}$, ou moins $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc. c'est-à-dire que les premiers sont les $\frac{2}{3}$, ou les $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, etc. des seconds.

Pour faire la copie plus grande que l'original, on voit bien qu'il n'y aurait qu'à placer le crayon en K et le calquoir en C. Alors si, sans changer cette nouvelle disposition, ces deux instrumens passaient successivement sur les nombres de la graduation naturelle 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$.... que nous venons d'obtenir, les traits de la copie seraient égaux à ceux de l'original, ou 2, 3, 4, 5, *etc. fois plus grands.* Mais le pantographe ne procure des copies vraiment bien fidèles, et ses mouvemens ne sont jamais plus doux, que quand on réduit de grand en petit.

Si l'on plaçait le pivot en C et le crayon en P, et que m, n eussent successivement les mêmes valeurs que ci-dessus, les lignes de la copie seraient visiblement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$... de celles de l'original; ainsi, pour ce cas, il faudrait que les règles AF, AH portassent cette autre graduation; mais ces mêmes rapports sont au contraire marqués 2, 3, 4, 5, etc. On ne sait trop pourquoi

l'on n'a pas préféré, pour la commodité du dessinateur, de tracer sur les règles AF, AB un grand nombre de parties égales, et de marquer les graduations de manière qu'elles expriment naturellement les rapports qu'il a intérêt de connaître. C'est une perfection que l'artiste devrait s'attacher à donner au pantographe.

Les mêmes règles portent aussi des divisions relatives aux surfaces, parce que l'on se propose quelquefois de faire la surface de la copie dans un rapport donné avec celle de l'original; supposons, par exemple, que ce rapport dût être comme $p : q$, on aurait pour le cas de la première disposition du pivot et du crayon, et à cause des triangles semblables ACP, ECK,

$$p : q :: \overline{CP}^2 : \overline{PK}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{AE}^2,$$

ou bien

$$\sqrt{p} : \sqrt{q} :: AC : AE,$$

et

$$\sqrt{p} : \sqrt{p}+\sqrt{q} :: CP : CK :: AP : EK;$$

d'où

$$x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}.a, \qquad y = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}.b.$$

Ces formules ne diffèrent donc des précédentes que par les signes radicaux. Rien ne serait plus facile que de trouver les valeurs numériques de x et y, en attribuant, comme ci-dessus, des valeurs à p et q, et en divisant, de plus, a et b en un certain nombre de parties égales (*). Nous allons parler d'un nouvel instrument fort simple, qui a un rapport intime avec le pantographe, et remplit le même but.

(*) Il existe une manière plus générale et plus élégante d'envisager la théorie du pantographe, ainsi que nous l'avons fait voir dans un petit *Recueil de propositions de Géométrie résolues par l'analyse*, où nous avons donné les équations fondamentales du mouvement de cet instrument, et prouvé que l'on pouvait tracer des ellipses en faisant suivre une ligne droite au calquoir. Mais pour pouvoir être compris des lecteurs qui s'occupent principalement du dessin, nous avons préféré de n'employer, dans les recherches ci-dessus, que la simple Géométrie.

Du micrographe.

106. L'instrument dont il est question maintenant, a été inventé en 1785, par Letellier, ingénieur en instrumens de mathématiques, qui le vendait sous le nom de *prosopographe;* dénomination que nous croyons devoir remplacer par celle de *micrographe*, vu que cet instrument sert principalement à réduire les dessins de grand en petit. Ce n'est pas cependant, comme on le verra bientôt, qu'on ne puisse également en faire usage pour rapporter un dessin de petit en grand, et même pour faire des copies de même grandeur que l'original; mais il réussit moins dans ces deux derniers cas que le pantographe.

L'assemblage du micrographe est fondé sur les mêmes principes Fig. 105
que celui de ce dernier instrument; comme lui il est composé de quatre règles AC, AK, PE, PF, maintenues parallèlement deux à deux par des tourillons P, A, B, D; mais il y a cette différence caractéristique et remarquable, que dans le pantographe, les tourillons qui attachent les règles y sont invariablement fixés, et que le calquoir, le crayon, ainsi que le pivot, varient de position, pour obtenir tel rapport que l'on veut entre l'original et la copie; tandis que dans le micrographe, au contraire, ces dernières parties étant fixes sur les règles, ce sont les tourillons B, D qu'il faut changer de place. Or c'est précisément de cette disposition que résulte la grande simplicité de cet instrument, pour lequel, d'ailleurs, on est dispensé de construire des règles bien calibrées, des boîtes à coulisses, et diverses autres garnitures ajustées, qui exigent une exécution parfaite. Le pantographe est sans contredit un instrument précieux et commode, mais il est volumineux et fort cher; le micrographe, au contraire, n'est ni lourd, ni embarrassant: trois petits boulons, chacun de la grosseur d'une forte épingle, une aiguille, quelques morceaux de liége et quatre petites règles que l'on peut trouver partout, voilà tout ce qui est nécessaire, à la rigueur, pour l'équiper et pour se débarrasser de l'ennui que donnent les réductions opérées par des procédés graphiques. Ce sont ces motifs qui nous engagent à développer la théorie de la composition de ce nouvel instrument, et à com-

pléter ce qui concerne la réduction *mécanique* des cartes et des dessins.

107. Puisque dans le micrographe, $ABPD$ forme un parallélogramme, que les trois points K, P, C sont toujours en ligne droite, et que les lignes AB, BP sont variables; désignons respectivement ces lignes par x et y; supposons, comme dans la théorie précédente, que K soit le calquoir, P le pivot autour duquel tourne tout l'instrument, et C le crayon; faisons les constantes $AC = a$, $AK = b$, et nous aurons, par suite de cette propriété et de celle des triangles semblables BPC, AKC,

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CK}{PC}, \qquad \frac{BP}{PC} = \frac{AK}{CK}.$$

Or comme on suppose que le rapport entre les traits de la copie et ceux de l'original est :: $m : n$, il est clair que

$$\frac{CK}{CP} = \frac{m+n}{m};$$

partant

$$x = \frac{an}{m+n}, \qquad y = \frac{bm}{m+n}.$$

On a coutume de faire $a = b$, parce que de l'égalité des branches AC, AK résulte celle de leurs divisions; en effet, on a alors $BC = BP = AD$, $DK = DP = AB$. En supposant donc successivement dans les formules

$$x = \frac{an}{m+n}, \qquad y = \frac{am}{m+n},$$

$m = n$, on a

$$x = \frac{a}{2}, \qquad y = \frac{a}{2},$$

$m = 1$, $n = 2$, on a

$$x = \frac{2a}{3}, \qquad y = \frac{a}{3},$$

$m = 1$, $n = 3$, on a

$$x = \frac{3a}{4}, \qquad y = \frac{a}{4},$$

et ainsi de suite.

Dans ces deux séries de valeurs, aucune n'indique naturellement le rapport qui existe entre la copie et l'original, puisque l'on voit que $AD = y$ doit être la moitié, ou le tiers, le quart, etc. de AK, pour que les lignes de la copie, tracées par le crayon C, soient égales aux lignes de l'original parcourues par le calquoir K, ou en soient la moitié, le tiers, etc. Il n'en serait pas de même si le pivot était en C et le crayon en B; car alors les valeurs ci-dessus de y indiqueraient précisément ce rapport; et cela est évident, puisque quand, par exemple, AD serait égal à $\frac{a}{2}$, le crayon P ferait moitié moins de chemin que le calquoir K. Au surplus, soit que l'on mette le pivot en P, soit qu'on le mette en C, il n'en faut pas moins marquer sur les quatre règles les rapports dont on peut avoir besoin. Tous les petits trous que l'on perce aux points de division, et qui reçoivent les boulons B, D, ne doivent pas être trop près les uns des autres, pour ne pas trop affaiblir les règles. Cet inconvénient n'a pas lieu dans le pantographe, à cause des boîtes à coulisses, et c'est principalement en cela que cet instrument est supérieur au micrographe.

Il n'est pas difficile de conclure, d'après ce que l'on a vu au n° 105, que si, pour la première disposition du pivot et du calquoir, l'aire devait être à celle de l'original :: $p : q$, l'on aurait ces nouvelles formules,

$$x = a\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}, \qquad y = a\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}},$$

à l'aide desquelles on trouverait sur les règles les points où il faudrait placer les tourillons B, D, pour obtenir entre les surfaces des deux dessins tel rapport que l'on voudrait.

Les règles intermédiaires PE, PF devant servir en diverses positions, on leur laisse assez de longueur pour qu'elles puissent porter les tourillons dans tous les cas, et c'est pour cette raison que leurs abouts E, F dépassent plus ou moins les points B, D. Cependant lorsque le point P est rapproché du point C, la règle PE, qui ne serait employée que sur une petite longueur, aurait un about extérieur qui surchargerait inutilement la règle AC, et même occasionnerait par son poids un déversement qui pour-

rait altérer la justesse de l'instrument. Dans ce cas, on emploie, au lieu de la règle *PE*, une petite règle de rechange sur laquelle on porte les divisions rapprochées du point *P*, et on les supprime sur la règle *PE*.

La tige du pivot s'implante dans la table sur laquelle on établit l'original, ou est supportée, comme nous l'avons dit n° 104, par une plaque de plomb que l'on déplace à volonté et qui sert de point d'appui. Chacun des tourillons est arrêté, sous les règles, par une *portée* qui sert de support et qui a six à sept millimètres de hauteur, pour élever l'instrument et empêcher qu'il ne pose de plat sur la table. Ces portées sont arrondies et polies par-dessous, afin que dans les divers mouvemens ces pièces puissent couler librement sans heurter contre les petites inégalités de la table, et sans érailler le papier.

De quelque manière que l'on fabrique les tourillons, soit avec des épingles à grosse tête, soit avec de petits boulons tournés, en fer, en cuivre et même en ivoire, ces matières laissent toujours des traits colorés et ineffaçables sur les endroits où elles frottent le papier. M. Lomet, ancien ingénieur en chef des ponts et chaussées, à l'amitié duquel je dois, en partie, mon peu de connaissances dans les sciences exactes et dans les arts, avait imaginé de n'employer que des tourillons dont la tige est un fil de fer ou d'acier d'un millimètre de grosseur, et dont la portée est formée par un petit globe de verre fondu, de six millimètres de diamètre environ, soudé à l'une des extrémités de la tige. Voici la manière de fabriquer ces globules. On soumet au feu de la lampe d'émailleur, ou à la flamme d'un gros chalumeau, un morceau de verre quelconque; mais l'on a soin de ne retirer ces petits globes du feu que peu-à-peu, afin de leur laisser le temps de se recuire, c'est-à-dire de prendre par ce refroidissement gradué une égale densité dans toutes leurs parties; car sans cette précaution ils ne manqueraient pas de se briser au moindre choc, comme les larmes bataviques.

Il est nécessaire que le micrographe soit établi et maintenu dans un plan parallèle à celui sur lequel on dessine. C'est pourquoi le pivot doit être garni d'une embâse d'égale hauteur que les portées

inférieures des tourillons. C'est aussi pour cette raison qu'il faut mettre chaque règle et sa parallèle par-dessus, et les deux autres par-dessous. Ordinairement la règle qui porte le calquoir et sa parallèle s'appliquent par-dessus les deux autres, parce qu'alors on obtient plus de hauteur du côté du calquoir, et que l'on a plus de facilité pour conduire l'instrument.

Lorsque les règles sont mises en mouvement, pour peu qu'elles éprouvent de déversement sur leur longueur ou sur leur largeur, il en résulte une sorte d'oscillation, en vertu de laquelle les règles s'élèvent peu-à-peu le long de la tige des tourillons; elles finiraient même par se désassembler si l'on n'y remédiait en les arrêtant à l'aide d'un petit tasseau de liége ou de bois fiché un peu à force au travers de l'about supérieur des tourillons, ou par le moyen d'un écrou de pression. Il faut cependant prendre garde que les assemblages ne soient trop serrés, afin que le mouvement des règles soit doux et que le trait du crayon soit bien égal; car pour peu qu'il y a de jeu ou de roideur, ce trait est tremblotté. On évite ces défauts, en grande partie, en étendant bien le papier de l'original et celui de la copie, et en collant leurs bords sur la table, ou en les fixant avec des petits clous à large tête de cuivre.

Si la copie doit être beaucoup plus petite que l'original, ou si l'on veut réduire un très-grand dessin, il convient de donner une grande longueur à la branche qui porte le calquoir, d'abord, afin qu'elle puisse atteindre à une plus grande distance, ce qui évite souvent l'embarras de changer l'instrument de position, et en second lieu, pour que le pivot se place à une distance plus éloignée du crayon que quand les branches sont égales. Mais dans ce cas il faut mettre un support vers le milieu de la plus grande règle, pour l'empêcher d'osciller lorsqu'on fait mouvoir le micrographe. Cependant, si l'on se trouve dans la nécessité de donner diverses positions à cet instrument, il faudra tirer des lignes de raccordement sur l'original et la copie, et ne continuer de dessiner que lorsque l'on sera certain que l'instrument est bien placé.

Pour réduire des objets présentant une suite de parallèles qui doivent conserver une grande régularité, tels que des épaisseurs de murs, etc., il ne faut indiquer que les lignes principales ou

les directrices, pour mener ensuite les autres à la distance convenable avec la règle et le compas; car on n'obtiendrait pas celles-ci d'une manière suffisamment exacte avec l'instrument, surtout si l'on n'avait pas le soin de rendre la pointe du crayon très-fine, ainsi que celle du calquoir, et si on ne dirigeait pas ce dernier outil avec la règle. Il faut convenir que le pantographe, ou tout autre instrument de ce genre, se trouve un peu en défaut lorsqu'on veut réduire les dessins d'architecture ou de machines, ou en général ceux qui ne sont composés que de lignes droites et d'arcs de cercles, pour lesquels on ne doit jamais faire usage que de la règle et du compas. Cependant, en pareille circonstance, on peut encore employer avec succès l'instrument dont il s'agit, en se contentant toutefois d'indiquer, comme nous venons de le dire, les lignes magistrales et les principaux points de la charpente du dessin, qu'il est facile ensuite de terminer.

Si des dessins de cette nature devaient être copiés de même grandeur, il serait plus exact et moins embarrassant de les calquer au *piquoir*, en ne perçant, bien entendu, l'original et la copie, qu'aux extrémités des lignes droites et aux centres des cercles. Ce procédé est très-usité parmi les ingénieurs et les architectes.

En remédiant à tous les inconvéniens que présentent les deux instrumens que nous venons de décrire, on parvient à leur donner une grande précision et à les faire manœuvrer avec célérité. Tels ont été les heureux effets de l'invention du pantographe, que les dessins de cartes géographiques ont acquis ce degré de pureté et de fidélité qu'on y remarque de nos jours, et qu'ils ont pu devenir aussi communs.

CHAPITRE III.

Questions relatives à la rédaction des cahiers topographiques et statistiques.

108. Les questions suivantes sont les élémens des cahiers faits pour suppléer aux détails et renseignemens inexprimables sur la carte, et pour développer et expliquer les détails consignés dans les tableaux ou légendes, enfin pour offrir des bases certaines à la confection d'un cadastre; elles font partie d'une instruction sur le service des ingénieurs-géographes, et elles ont été rédigées par M. Vallongue, général du génie, tué au siége de Gaëte, et vivement regretté de tous ceux qui ont connu sa bravoure, ses talens et ses qualités morales.

Lorsque l'on sera chargé de former de pareils cahiers, l'on pourra consulter aussi l'*Essai sur les reconnaissances militaires*, cité à la page 172. Quant aux signes conventionnels et aux modèles d'écritures à employer dans tous les œuvres géographiques et topographiques, on les trouvera dans le cinquième numéro du *Mémorial du Dépôt général de la Guerre.*

Voici quels doivent être les élémens de ces cahiers :

POUR UN DÉPARTEMENT, CANTON OU COMMUNE.

§ PREMIER.

PHYSIQUE DU TERRITOIRE.

ATMOSPHÈRE.

1°. *Température.* Degrés de longitude et de latitude entre lesquels elle est comprise.

Le *maximum* de chaleur et de froid; s'apperçoit-on de variations sensibles dans ce *maximum*, et en indique-t-on les causes?

2°. *Météores.* Attribue-t-on à quelque cause locale ou prochaine les pluies abondantes, fréquentes ou rares? le pays en est-il incommodé ou servi? Quels sont les vents dominans? sont-ils favorables ou nuisibles?

Quels sont les lieux les plus exposés à la grêle?

La neige séjourne-t-elle?

A quelle époque les brouillards paraissent-ils? sont-ils épais, durables? leurs effets.

3°. *Air.* Quelles sont les causes éloignées ou prochaines, anciennes ou nouvelles, permanentes ou passagères, naturelles ou artificielles d'insalubrité, et les moyens employés ou praticables de les atténuer ou de les détruire?

EAUX.

Courantes. Indiquer leur source, le plus ou moins de rapidité de leur cours, divisé en trois parties: 1°. de la source au point où elles deviennent flottantes; 2°. de là au point où elles commencent à être navigables; 3°. de celui-ci à leur confluent fluvial ou maritime; assigner, dans chacune de ces trois parties, la plus grande, la moyenne et la plus petite hauteur des eaux; leurs crues; si elles sont périodiques ou anomales; les causes d'accroissement; la direction du cours dans son ensemble; quelle rive il affecte; si c'est l'effet d'une pente générale ou d'une contre-pente; la nature du lit et des rives, si le lit est encaissé, variable; la situation des gués, bacs, ponts, et des points favorables pour en établir de nouveaux; la direction, la forme et la nature des vallons, et de leurs affluens.

Canaux. Leur point de départ et d'embouchure, leurs dimensions; les ouvrages d'art remarquables par leur construction, l'époque de leur établissement; à quels transports servent-ils? la navigation est-elle continue ou par intervalles? le prix du transport d'un myriagramme par myriamètre.

Étangs. Leur nombre, leur surface, leur qualité : sont-ils nuisibles ou utiles? à qui appartiennent-ils? sont-ils poissonneux?

Marais. Les marais sont-ils praticables à l'infanterie ou à la cavalerie? apperçoit-on quelques moyens de dessèchement et quelque utilité à cette opération? y a-t-il quelque variation dans leur surface? y a-t-il des joncs, des arbustes, pour faire des fascines ou des claies? quelle est la nature de leur fond?

Y a-t-il des marais salans? leur étendue; qualité et débouché de leur produit.

Fontaines. Leur état, leur source, leur usage, la qualité de leurs eaux, leur abondance ou rareté.

Y a-t-il des machines hydrauliques? en donner une idée.

Y a-t-il des eaux thermales ou salées? leurs qualités.

TERRAIN.

Conformation. En plaines, leur plus haut point d'élévation, leur inclinaison, leur direction.

En coteaux continus ou entrecoupés; leur pente, leur direction, leur hauteur : à quelle pente générale ou secondaire appartiennent-ils? à quel système se rattachent-ils? sont-ils cultivés, boisés ou découverts?

En montagnes: de quelle chaîne principale ou secondaire font-elles partie? à quel nœud, à quel plateau se rattachent-elles? où se terminent-elles? leur orientement, leurs versans, leur plus grande hauteur au-dessus du niveau de la mer et au-dessus du lieu: sont-elles accessibles dans tous les points ou inaccessibles dans quelques parties, cultivées, en pâturages ou arides, boisées ou nues? leurs roches sont-elles calcaires, granitiques, quartzeuses ou schisteuses? y a-t-il des glaces, neiges, matières volcaniques, coquillages ou pétrifications à leur surface?

Exposition. Cause secondaire de variation de chaleur, de froid, vent, sécheresse, inondation, aridité ou fertilité; favorable ou nuisible à certains produits ou à la salubrité.

Étendue. Ses dimensions, délimitations et divisions par classes de terrain et espèces de culture.

Qualité du sol. Nature de la terre végétale; son épaisseur moyenne: est-elle composée d'argile, de sable calcaire, de sable quartzeux, de craie, de marne, de terreau, etc. et dans quelles proportions?

Est-elle sèche, humide, légère, pesante, compacte? retient-elle l'eau? la laisse-t-elle couler ou infiltrer? pose-t-elle sur argile, glaise, sable, pierre ou galet?

§ II.

STATISTIQUE.

POPULATION.

Habitans. Époque du dernier recensement; nombre actuel par sexe, enfance, virilité, vieillards, conscrits, invalides.

Combien d'individus par myriare quarré?

Combien d'ares par individu?

Par quelle cause la population accrue ou diminuée?

Constitution des habitans; leur nourriture; leurs mœurs.

Animaux domestiques. — Chevaux. Bœufs. Vaches. Anes. Mulets. Moutons. Chèvres. Porcs. — Leur nombre; leurs qualités; employés à la culture ou au transport à brancard ou à dos; leur nourriture; la commune y suffit-elle? sont-ils indigènes ou aborigènes? les races vont-elles en se perfectionnant ou en se détériorant? leur prix.

Animaux de basse-cour. Leurs espèces, leurs qualités et prix.

Abeilles. Quel parti en retire-t-on?

Insectes et vers les plus remarquables par leur nombre et leurs qualités utiles ou nuisibles.

VALEURS FONCIÈRES.

Terres à grains et plantations. Leur superficie divisée par qualité et prix.

Comment fume-t-on et cultive-t-on? quelles espèces de plantes, quelle quantité semée et recueillie ? quel usage en fait-on ? quelles on préfère? sont-elles supérieures ou inférieures à celles des environs? leur prix moyen, leur superficie totale divisée par qualité.

Bois et forêts. En plaines ou coteaux; à quels aspects; en masses ou en lopins; leurs propriétaires; quelle espèce d'arbre y domine; leur qualité; indiquer ceux qui pourraient y prospérer; les bois sont-ils dévastés ? sont-ils rares, et pourquoi? suffisent-ils aux besoins ? servent-ils au chauffage ou à des usines? replante-t-on, comment et quelles espèces? y a-t-il des bois de construction pour la marine ou pour le civil? fait-on du charbon, du tan, du salin? en quelle quantité?

Arbres fruitiers: quelles espèces ? leur culture, produit et qualité; leur usage.

Châtaigniers.
Oliviers.
Mûriers.
} Y en a-t-il? leur quantité, qualité et produit.

Vignes. Leur superficie, etc.

Sur quels terrains; espèces de raisin cultivées; qualité, abondance et durée des vins; les vignes sont-elles basses ou échalassées? leur culture se fait-elle à bras ou avec la charrue? comment se payent les vignerons? à quelle époque les vendanges; y a-t-il des crus distingués? le prix des vins; fait-on des eaux-de-vie? leur quantité, qualité et prix.

Prés. Leur surface et espèces; leurs engrais, leur arrosement; quantité et qualité des foins; leur prix; se consomment-ils sur les lieux? à quelle époque fauche-t-on?

Pâturages. Leur surface, qualité; communs ou privés.

Carrières. De sable à divers usages, terres à tuileries, poteries, faïenceries, etc.; de grès, tuf; de terre à creusets, pierres meulières, à fusil, ardoises, terres colorées employées dans les arts.

De craie, falun, pierre à chaux, marbre, moëllon, pierre de taille, plâtre, marne, cristaux.

De pierres-ponces, laves, basalte, pouzzolane.

Leurs gisemens, leurs quantités, leurs qualités.

Mines. De platine, d'or, d'argent, de cuivre, de fer, d'étain, de mercure, de zinc, d'antimoine, de plomb, de bismuth, de cobalt et d'arsenic, etc.; de sel, de bitume, charbon de terre, tourbe, soufre, pyrites, etc.

Leurs gisemens, quantités et qualités, propriétaires, usages, depuis quand exploitées? prix des matières brutes et ouvrées.

Habitations. Leur nombre, ce qu'on peut loger dans chacune; combien d'écuries, de granges? les maisons sont-elles rassemblées ou éparses, grandes, commodes, propres, aérées, solides, agréables; en bois, en pierre, en pisé; couvertes de pierres, de tuiles, de bois, d'ardoises, de paille ou de chaume; éloignées des cloaques, environnées d'arbres? quel est le prix d'une maison moyenne?

Jardins et vergers. Leur surface, espèce, culture, produit et qualité.

Terrains vagues. Des landes et bruyères, ou fougères; des dunes, des sables, des terres marécageuses; des terres en friche: faire connaître leurs quantités respectives, leur qualité, et indiquer le genre de culture dont ces terrains seraient susceptibles.

INDUSTRIE.

Usines. Moulins mus par l'eau ou par le vent; leur nombre, leur produit; sont-ils suffisans?

Moulins à huile, à tan, à scie.

Forges. Sont-elles à hauts-fourneaux ou à la catalane, à réverbère?

Qualités du métal: est-il d'un grain grossier, aigre, cassant? est-il doux, liant et solide? prix du quintal prêt à entrer dans le commerce.

Fonderies. Batteries, mines à laminer; aciéries, fontes de canons ou de toutes autres pièces figurées; nature, valeur et quantité des combustibles employés; lieu d'où on les tire; moyens de transport; temps de travail, de chômage; produit d'une mine par mois.

Des matières minérales, végétales, animales. Leur nombre, l'ancienneté de chacune ; le nombre d'ouvriers qu'elles emploient ; prix des matières premières produites par le sol, ou de celles étrangères qui y sont mises en œuvre ; prix de la main-d'œuvre ; qualité de ces matières ; quantité et qualité des produits, leur valeur au prix de fabrique, leurs débouchés ; apperçu des machines et procédés ; obstacles qui s'opposent aux progrès des manufactures, et circonstances qui leur sont favorables.

Arts et métiers. Combien de bras employés à l'agriculture ? combien de charrons, de menuisiers, de maréchaux, de serruriers, de maçons, de terrassiers, de couvreurs, vitriers, ferblantiers, fondeurs, armuriers, boulangers, bouchers, aubergistes, tailleurs, chapeliers, tanneurs, cordonniers, peintres, etc. ? le prix actuel des journées et des divers produits d'arts confectionnés, avec le prix antérieur à la révolution, et leur rapport avec celui du blé ou des matières premières.

COMMERCE.

Exportation. Des matières premières,

De subsistances,

D'objets manufacturés,

Des produits d'arts.

Importation. Idem.

Communications. Indiquer toutes les routes, chemins vicinaux ou sentiers qui aboutissent au chef-lieu du département ou qui y passent ; dire où ils conduisent, d'où ils viennent, et les distances de cet endroit aux plus prochains ou aux plus notables lieux, estimées en kilomètres ou myriamètres dans les pays de plaine, et en heures de marche dans ceux de montagne.

En quel état sont ces communications aux diverses saisons de l'année ; si elles sont pavées, ferrées, ou en terrain naturel ; si l'on en prend soin, et si elles sont praticables pour l'artillerie, les charrois, la cavalerie, les mulets, l'infanterie ou les chasseurs ; si elles sont plantées ou non d'arbres, avec ou sans fossés ; quelle est la largeur, la pente de celles qui sont en montagne, et les moyens qu'il y aurait de les élargir ou adoucir au besoin ?

Observer si, outre les communications connues, il n'est point d'autre direction qui, suivie à travers champs, pût servir, avec plus ou moins de travail, en peu de jours, au passage des troupes et convois.

OBSERVATIONS GÉNÉRALES.

Sur la population. Causes générales, naturelles ou politiques de son augmentation ou diminution; en préciser les époques; recueillir des données sur le nombre des naissances annuelles, sur la mortalité, sur la longévité.

Agriculture. État ancien de l'agriculture dans la contrée, son amélioration ou sa détérioration; événemens qui ont donné lieu à ces changemens; époques auxquelles ils remontent.

Rotation des récoltes; moyens employés pour le labourage, les divers outils aratoires; y en a-t-il qui soient particuliers au pays? combien coûte le labourage d'un hectare de terre? bat-on après la récolte ou dans le cours de l'année? enferme-t-on les pailles dans des granges, sous des hangars, ou en forme-t-on des paillères en plein air?

Les possessions sont-elles entourées de haies, de fossés, de murs ou d'arbres?

Y a-t-il beaucoup de propriétaires cultivateurs? travaillent-ils eux-mêmes leurs héritages? depuis la révolution leur nombre est-il augmenté ou diminué? pourquoi?

Trouve-t-on facilement des ouvriers à la journée? en vient-il d'étrangers?

Mœurs des diverses classes de cultivateurs; quel est leur costume? quels sont leurs amusemens? sont-ils dans l'aisance? savent-ils lire et écrire? ont-ils un idiome particulier? son origine; en quoi diffère-t-il du français? quelles sont leurs maladies les plus ordinaires?

Est-ce un pays de grande ou de petite culture? c'est-à-dire, les biens affermés sont-ils cultivés immédiatement par le fermier, ou celui-ci les fait-il cultiver par des métayers, maîtres-valets, etc.?

durée ordinaire des baux ; prix des journées ou des gages d'un charretier, d'une fille de service, d'un berger, etc., et leurs variations à certaines époques, rapportées au prix du blé ?

Industrie. Quel genre d'industrie s'appliquent, et dans quel réussissent principalement les habitans ? est-elle suffisamment encouragée ? fait-elle des progrès, et quelle en est la cause ? quels articles seraient susceptibles d'y être perfectionnés ? y est-on attaché à la routine ? y accueille-t-on les améliorations ? y a-t-il quelques moyens d'instruction, quelque établissement propre à la répandre ?

Commerce. Importation, exportation ; comment et avec qui sont établis les rapports commerciaux ? nature de ces rapports ; quel est généralement le prix des transports par terre et par eau, à une distance donnée ? par quels moyens et en combien de temps se fait ce transport ? y est-on à portée d'un port ?

Y a-t-il des foires, des marchés, et à quelles époques ? quelle est leur durée ? quelles marchandises, quels étrangers y arrivent ? y a-t-il des halles ? de quelle considération jouit l'état de commerçant ? sont-ils nombreux, riches ? cet état se suit-il de père en fils ? sont-ils connus par leur bonne-foi, leur franchise en affaires ?

§ III.

HISTORIQUE ET MILITAIRE.

A moins qu'il ne s'agisse d'une grande commune, les renseignemens indiqués dans ce paragraphe doivent embrasser une contrée, un canton.

Historique. Époque à laquelle l'histoire commence à faire mention de la commune ou de la contrée.

Son gouvernement, ses mœurs avant la conquête des Romains.

Époque de cette conquête.

De quelle division de l'empire le pays faisait-il partie ?

Envahissement par les Barbares.

A quelle époque le pays a-t-il passé sous la domination des Français, et par quel événement ?

Quels sont, sur l'origine de la commune, les particularités de la contrée, le sentiment des personnes instruites, les traditions et les bruits populaires ?

Quel est l'esprit des habitans ? quels sont leurs préjugés, leurs goûts dominans, leurs opinions politiques et religieuses ?

Époques auxquelles les sciences et les arts y ont été favorisés, et ont commencé à y fleurir : en quel état y sont les principales connaissances de l'esprit, les principaux arts ? y a-t-il quelques institutions dans ce genre ? quel est leur but, leur composition, leur utilité ?

Travaux, entreprises, traits de bienfaisance et d'humanité ; hommes célèbres ou citoyens vertueux qui ont honoré la contrée.

Quelles traces utiles ou fâcheuses y a laissées la révolution ?

Comment le pays est-il divisé relativement à l'administration militaire, civile et judiciaire ?

Quelles parties ces nouvelles divisions comprennent-elles parmi celles qui étaient établies par les anciennes divisions ?

Nombre total des communes du canton.

Quelles y sont les écoles publiques ? par quel nombre d'élèves fréquentées ? y a-t-il des bibliothèques publiques, jardins de botanique, laboratoires de chimie, cabinets de physique, muséum de tableaux et cabinets d'histoire naturelle ?

Y a-t-il des monumens antiques, quelques inscriptions, quelques chefs-d'œuvre dans un art quelconque ?

Y a-t-il des jeux publics ? en quoi consistent-ils ?

Les papiers publics y sont-ils nombreux et recherchés ?

Militaire. Notice des principales guerres dont le pays a été le théâtre.

Recherches des champs de bataille et des positions que les armées y ont occupées : description de ces positions ; indication de celles qui semblent s'offrir pour défendre telle communication principale, tel établissement majeur.

S'il y a des places ou postes fortifiés : comment et en quel état sont-ils ? quel rôle ont-ils joué et peuvent-ils jouer ?

Le pays offre-t-il quelque obstacle naturel ? l'indiquer et le considérer sous le rapport de l'offensive et de la défensive.

Le pays est-il coupé, uni, boisé ou nu, accidenté ou plat, exposé aux inondations ou à l'aridité, pauvre ou riche ?

Quel nombre d'hommes, de chevaux et de voitures la contrée pourrait loger, fournir, au besoin, pour le service momentané de l'armée ?

Combien de fours publics, où situés, et combien de rations on y pourrait faire cuire par jour ?

Quel nombre de soldats le pays a fourni pendant la guerre de la révolution ?

A combien se porte le nombre des conscrits et des citoyens en état de porter les armes ?

Le service de la garde nationale sédentaire s'y fait-il ? et de combien d'hommes est-elle composée ?

La jeunesse y a-t-elle l'esprit guerrier ? les braves y sont-ils honorés ?

Quelques nouveaux détails sur les gués, bacs, ponts et routes *qui y aboutissent*; *leur nombre*, *leur nature* et *leur situation* sur chaque principal cours d'eau ? y a-t-il des bateaux ? leurs dimensions, leur nombre : sont-ils tirés par des chevaux ou par des hommes ? le nombre des bateliers.

SUPPLÉMENT

AU PREMIER LIVRE.

Note sur le n° 11.

109. LA formule $\Delta\delta = \alpha \operatorname{tang}\delta$, sur laquelle est fondée la démonstration de celle du n° 11, n'est pas très-exacte, ainsi que je l'ai dit ; puisque, suivant la théorie et les calculs de M. Laplace, (*Méc. Cél.* Tom. IV, page 271. Équat. (B)), on a, à zéro de température et sous la pression $0^m,76$,

$$\Delta\delta = \alpha \operatorname{tang}\delta + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{R}(1+2\cos^2\delta)\frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos^2\delta} - \alpha.0{,}00125254\,\frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos^2\delta},$$

R étant le rayon réduit en secondes, et $\Delta\delta$ la réfraction astronomique donnée en mêmes unités. Le coefficient α n'est donc pas, à proprement parler, la réfraction à 50^{gr} de distance au zénit, mais il en diffère bien peu, comme l'on voit. Or il résulte des observations citées de M. Delambre, que cette réfraction est exactement de $186'',728$ (division centésimale), à la même pression et à la même température. Si donc, dans la formule précédente, l'on met $\Delta\delta = 186'',728$ et $\delta = 50^{gr}$, l'on trouvera que

$$\alpha = 187'',087.$$

Pour donner une notion plus précise de ce coefficient, j'observerai qu'il est égal à

$$\frac{\frac{2K}{n^2}(\rho)}{1+\frac{4K}{n^2}(\rho)},$$

et que la quantité $\frac{4K}{n^2}(\rho)$ est l'accroissement total du quarré de la vîtesse de

lumière, lorsqu'elle a passé du vide dans l'air et subi toute son action. Cette quantité peut donc se déduire des observations astronomiques, mais les expériences sur la force réfringente de l'air la font connaître plus directement et avec non moins d'exactitude. Le Mémoire de MM. Biot et Arago, déjà cité à la page 39, ne laisse rien à désirer sur ce sujet.

Note sur le centre d'oscillation.

110. Malgré les détails dans lesquels je suis entré sur la théorie du pendule composé oscillant dans l'air, il reste encore un point important à examiner pour compléter cette théorie ; c'est de savoir si *la position du centre d'oscillation est effectivement indépendante de la résistance du milieu*, ainsi que je l'ai implicitement supposé dans le n° 16, lorsque j'ai eu en vue la détermination de ce centre. Pour résoudre cette question de mécanique, il faut remarquer que la vîtesse d'un corps qui se meut dans un fluide quelconque étant sans cesse diminuée par la résistance de ce fluide, cette résistance exerce nécessairement son action dans le sens directement opposé au mouvement du corps, et peut être considérée comme la résultante de toutes les résistances partielles dues aux molécules fluides situées dans la direction du mouvement des points de la surface choquée. Ainsi toutes les molécules du corps sont bien animées de la force accélératrice de la pesanteur, mais sa surface antérieure est la seule qui reçoive le choc du milieu. Or en vertu de la liaison du système, ces forces appliquées ne produisent pas tout leur effet; et d'après *le principe de d'Alembert*, *si on calcule les forces qui ont lieu réellement*, il doit y avoir équilibre entre celles-ci, prises en sens contraire, et les forces appliquées. De plus, à cause du point fixe de suspension, les conditions d'équilibre se réduisent à une seule ; savoir, que la somme des momens des forces en équilibre, pris par rapport à ce point, soit égale à zéro (*Mécan. de* Francœur, n° 247, 4e *édit.*)

Cela posé, la force appliquée à une molécule dm quelconque du corps est $g_1 dm$, et son moment est $pg_1 dm$, p étant la perpendiculaire abaissée du point fixe sur la verticale passant par cette molécule, et g_1 la gravité relative au milieu dans lequel le corps oscille (n° 14) (*). La force appliquée à un élément $d\varpi$ de la surface choquée, et agissante dans le sens du mouvement de cet élément, sera

(*) On sait, par le n° 16, que $p_1 = p - \Pi$; ainsi en désignant par D et Δ les densités respectives de la masse M et de l'air, on a

$$g_1 D = gD - g\Delta,$$

g étant la gravité dans le vide : partant

$$g_1 = \left(1 - \frac{\Delta}{D}\right) g.$$

représentée par $Nr^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} d\varpi$, et son moment le sera par $Nr^3 \frac{d\theta^2}{dt^2} d\varpi$, r étant la distance au point fixe, et la résistance du milieu étant supposée proportionnelle au quarré de la vîtesse de l'élément de la surface. En effet, la vîtesse angulaire du corps est $\frac{d\theta}{dt}$, et la vîtesse absolue de l'élément $d\varpi$ est $r \frac{d\theta}{dt}$. Maintenant puisque les momens provenans de la résistance du milieu sont, pendant la durée de la demi-oscillation descendante, de signe contraire à ceux de la pesanteur, et que tous ces momens sont de même signe pendant la durée de la demi-oscillation ascendante, la somme des momens des forces appliquées sera en général

$$\int pg_1 dm \mp \int Nr^3 \frac{d\theta^2}{dt^2} d\varpi,$$

la première intégrale étant prise dans toute l'étendue du corps, et la seconde intégrale dans l'étendue de sa surface choquée seulement. D'ailleurs la somme des momens des forces qui ont effectivement lieu, et qui agissent dans le sens des tangentes aux cercles verticaux qu'elles font décrire, est

$$\int r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} dm,$$

l'intégrale étant prise dans toute l'étendue du corps. On a donc pour l'équation d'équilibre entre les forces appliquées et ces dernières prises en sens contraire,

$$\int pg_1 dm \mp \int Nr^3 \frac{d\theta^2}{dt^2} d\varpi - \int r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} dm = 0,$$

en prenant le signe supérieur lorsque le corps descend, et le signe inférieur lorsqu'il monte.

Mais par la théorie du centre de gravité, on a $\int pg_1 dm = g_1 \int p dm = g_1 PM$, P étant la valeur de p relative à ce centre, et M la masse du corps; donc, à cause de $P = R \sin\theta$, l'équation précédente devient

$$Rg_1 M \sin\theta \mp \frac{d\theta^2}{dt^2} N_1 - \frac{d^2\theta}{dt^2} \int r^2 dm = 0, \qquad (1)$$

en désignant d'ailleurs, pour abréger, par N_1 l'intégrale $\int Nr^3 d\theta = N \int r^3 d\theta$. Quant au moment d'inertie $\int r^2 dm$, il est égal à $M(R^2 + k^2)$. (*Mécan.* de Francœur, n° 240.)

Il résulte de là que l'équation du mouvement d'un pendule simple d'une longueur λ, qui oscillerait dans le même milieu et en vertu de la même force accélératrice g_1, serait

$$\lambda g_1 M' \sin\theta \mp \frac{d\theta^2}{dt^2} \cdot n - \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \lambda^2 M' = 0, \qquad (2)$$

(k étant $= 0$, puisque dans ce pendule le centre de gravité et celui d'oscillation se confondent). Ainsi, pour faire coïncider ces deux mouvemens, il suffit d'établir les deux équations de condition suivantes :

$$\frac{\lambda g_1 M'}{\lambda^2 M'} = \frac{R g_1 M}{\int r^2 dm}, \quad \frac{N_1}{\int r^2 dm} = \frac{n}{\lambda^2 M'}.$$

La première équation $\frac{1}{\lambda} = \frac{RM}{\int r^2 dm}$, ou $\lambda = \frac{R^2 + k^2}{R}$ déterminant la longueur du pendule simple dont les oscillations seraient synchrones avec celles du pendule composé M, il s'ensuit que cette longueur, c'est-à-dire la distance du centre d'oscillation au point de suspension, est indépendante de la résistance du milieu. Quant à la seconde équation $\frac{N_1}{M(R^2 + k^2)} = \frac{n}{\lambda^2 M'}$, elle fournit la valeur de n en fonction de N_1; et comme la masse M' du pendule simple reste indéterminée, on a, en la faisant égale à M,

$$\frac{n}{\lambda} = \frac{N_1}{R}, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{N_1 \lambda}{R}.$$

Pour une même oscillation, la valeur de n sera constante; mais d'une oscillation à la suivante cette valeur changera, si les deux portions de surface choquées alternativement ne sont pas semblables; ce qui résulte évidemment de ce que N_1 est une intégrale étendue à toute la partie de surface exposée au choc du fluide.

Si, pour plus de généralité, nous eussions supposé la résistance une fonction de la vîtesse, représentée par $Nv^{\epsilon} + N'v^{\epsilon'} + \ldots$; N, N' étant des coefficiens constans, et ϵ, $\epsilon' \ldots$ des exposans positifs quelconques, cette nouvelle hypothèse n'aurait modifié en rien les conséquences précédentes, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre.

On trouve dans les *Œuvres de* Jean Bernoulli, tome IV, page 382, une solution analytique de cette question, mais Clairaut est le premier qui, au moyen du *principe de la conservation des forces vives*, ait découvert les propriétés ci-dessus. (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1738.)

Formules géodésiques analogues à celles du n° 7.

111. Un des problèmes les plus importans et les plus difficiles qu'on ait à résoudre dans les grandes opérations géodésiques est, sans contredit, celui qui a pour objet la détermination de la latitude et de la longitude de l'une des extrémités d'un côté de triangle donné de grandeur et de direction, lorsque la position géographique de l'autre extrémité est connue. Pour résoudre ce problème

on est obligé de faire une hypothèse sur la figure de la Terre : or, comme il est reconnu que cette figure, malgré ses irrégularités, diffère très-peu d'un sphéroïde elliptique de révolution, la manière, sinon la plus rigoureuse, mais la plus simple d'appliquer l'analyse dans cette circonstance, est de chercher d'abord les formules qui conviennent à la figure sphérique, puis d'y introduire les termes dépendans de l'excentricité de la Terre ; alors tout peut se déduire avec facilité du théorème de Taylor ; mais en partant de l'équation différentielle de la plus courte distance, les calculs deviennent très-compliqués, et ce n'est que par des transformations adroitement faites que l'on parvient à rendre certaines intégrations plus faciles, et aux formules que l'on a en vue de trouver. C'est ainsi que Dionis-du-Séjour et Legendre, ensuite, ont résolu la question (n° 7). Quoique j'aie traité amplement cette matière et développé même la belle théorie que M. Laplace a donnée, du sphéroïde irrégulier, je ne puis me refuser au plaisir de publier à ce sujet les calculs de M. Henry, parce qu'ils ont l'avantage de conduire assez simplement aux formules de Dionis-du-Séjour, que quelques lecteurs pourraient desirer de connaître. Les voici :

I. x, y, z étant les coordonnées rectangulaires de la surface d'un sphéroïde quelconque, comptées du centre de ce corps, l'on a pour l'équation à la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur cette surface entre deux points donnés, en désignant par s la longueur de cette ligne ou cette plus courte distance,

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right)dy + d\left(\frac{dz}{ds}\right)dz = 0,$$

et pour expression de l'élément de cette ligne,

$$ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Supposons que ce sphéroïde soit de révolution; prenons pour méridien fixe le plan des xy, l'axe des x étant l'axe même de révolution; et désignons par n la droite qui est la commune section du plan yz par un méridien mobile xn, dont le plan fait avec celui du méridien fixe un angle ω.

Il est visible que n est l'hypoténuse d'un triangle rectiligne rectangle dont y et z sont les côtés, z étant d'ailleurs opposé à ω. L'on a ainsi

$$y = n \cos \omega,$$
$$z = n \sin \omega.$$

En différentiant ces équations, elles deviennent

$$dy = dn \cos \omega - nd\omega \sin \omega,$$
$$dz = dn \sin \omega + nd\omega \cos \omega,$$

et quarrant chaque membre de celles-ci, on a

$$dy^2 + dz^2 = dn^2 + n^2 d\omega^2;$$

au moyen de quoi, la première des équations ci-dessus prend d'abord cette forme

$$dyd\left(\frac{d(n\cos\omega)}{ds}\right)+dzd\left(\frac{d(n\sin\omega)}{ds}\right)=0;$$

et la valeur de ds se change en la suivante,

$$ds=(dx^2+dn^2+n^2d\omega^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On a le rapport $\frac{dz}{dy}$ en considérant, dans l'équation à la surface du sphéroïde, l'abscisse x comme constante. Donc puisque n est fonction de x, cette quantité doit pareillement être regardée comme constante; l'on a ainsi

$$dy=-n\,d\omega\,.\sin\omega,$$
$$dz=\quad n\,d\omega\,.\cos\omega.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'avant-dernière équation, elle devient

$$\frac{n\sin\omega}{ds}d^2(n\cos\omega)-\frac{n\cos\omega}{ds}d^2(n\sin\omega)=0.$$

Intégrant cette équation, et y ajoutant la constante arbitraire C, l'on a

$$n\sin\omega\,d(n\cos\omega)-n\cos\omega\,d(n\sin\omega)+Cds=0;$$

équation qui, par la différentiation actuelle, se réduit à celle-ci :

$$Cds-n^2d\omega=0;$$

en y mettant au lieu de ds sa valeur, elle devient

$$n^2d\omega-C(dx^2+dn^2+n^2d\omega^2)^{\frac{1}{2}}=0.$$

C'est, sous une autre forme, l'équation à la ligne la plus courte, tracée sur la surface d'un sphéroïde de révolution.

Si pour déterminer la constante C, l'on écrit l'avant-dernière équation comme il suit,

$$\frac{C}{n}=\frac{nd\omega}{ds},$$

on observera que la quantité $\frac{nd\omega}{ds}$ est le sinus de l'angle que fait la ligne de plus courte distance avec le méridien mobile, au point déterminé sur ce méridien par les coordonnées rectangulaires x et n; en nommant donc α cet angle, l'on a

$$C=n\sin\alpha.$$

On voit, par ce résultat, que $n \sin \alpha$ est, par la propriété de la courbe, une quantité constante. On aura donc la valeur de C lorsque l'on connaîtra l'angle particulier, de la courbe avec le méridien, correspondant à une certaine valeur particulière de n. Désignons par κ cette valeur particulière de n, et par A l'angle qui lui répond ; l'on aura pareillement

$$C = \kappa \sin A.$$

La comparaison de ces deux valeurs de C, donne

$$n \sin \alpha = \kappa \sin A.$$

II. Supposons maintenant que le sphéroïde de révolution soit elliptique et aplati aux pôles, et dans cette hypothèse nommons,

a, le demi-grand axe de l'ellipse d'un méridien, ou le rayon de l'équateur ;

b, le demi-petit axe de l'ellipse d'un méridien, ou le demi-axe de révolution ;

x, l'abscisse prise depuis le centre du sphéroïde sur l'axe de révolution ;

n, L'ordonnée prise de même sur le méridien mobile perpendiculairement à x ;

φ, l'angle que fait, avec le plan de l'équateur, la normale à la surface du sphéroïde au point déterminé par les coordonnées x, y, z, ou bien encore la latitude de ce point ;

θ, l'angle que forme, avec le plan de l'équateur, un rayon mené du centre du sphéroïde dans le plan xn au point où la circonférence du cercle inscrit à ce méridien est coupée par l'ordonnée n.

En faisant attention que les ordonnées à l'ellipse d'un méridien et au cercle inscrit à ce méridien, correspondantes à la même abscisse, sont entre elles dans le rapport du grand au petit axe ; l'on a

$$x = b \sin \theta,$$
$$n = a \cos \theta ;$$

et en différentiant ces équations, elles deviennent

$$dx = \quad bd\theta \operatorname{cosin} \theta,$$
$$dn = -ad\theta \sin \theta.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation à la ligne de plus courte distance, mise sous cette forme

$$n^2 (n^2 - C^2)\, d\omega^2 = C^2 (dx^2 + dn^2),$$

on obtiendra

$$a^2 \operatorname{cosin}^2\theta \left[(a^2 - C^2) - a^2 \sin^2\theta\right] d\omega^2 = C^2 \left[b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2\theta\right] d\theta^2,$$

L'on a en même temps,

$$a^2 \cos^2\theta \, d\omega = C ds ;$$

éliminant $d\omega$ de cette dernière équation, au moyen de la précédente, il vient

$$\frac{1}{a^2 \cos^2\vartheta} [(a^2 - C^2) - a^2 \sin^2\theta] \, ds^2 = [b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2\vartheta] \, d\vartheta^2.$$

Substituant la valeur de η dans l'expression de la constante C, l'on a

$$C = a \sin\alpha \cos\theta ;$$

et désignant par Θ ce que devient l'angle θ lorsque l'ordonnée η devient égale à $\varkappa$, on a pareillement

$$C = a \sin A \sin\Theta.$$

Soit Ψ un angle subsidiaire tel que l'on ait

$$\operatorname{cosin}\Psi = \sin\alpha \operatorname{cosin}\theta.$$

De ces équations l'on tirera la relation

$$\operatorname{cosin}\Psi = \sin\alpha \operatorname{cosin}\theta = \sin A \operatorname{cosin}\Theta.$$

Substituant dans les équations ci-dessus la valeur de la constante C, et faisant, pour plus de simplicité, $\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$; l'on aura ces deux équations différentielles

$$\frac{ds}{b} = \frac{d\sin\theta}{(\sin^2\Psi - \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \cdot (1 + \varepsilon^2 \sin\theta^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{ad\omega}{b \operatorname{cosin}\Psi} = \frac{d\sin\theta}{(\sin^2\Psi - \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\operatorname{cosin}^2\theta} \cdot (1 + \varepsilon^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}$$

qu'il ne s'agit plus que d'intégrer.

Pour cet effet, réduisons en série le radical $(1 + \varepsilon^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}$, et nous aurons, en nous bornant aux termes de l'ordre ε^4,

$$\frac{ds}{b} = \frac{d\sin\theta}{(\sin^2\Psi - \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2\theta - \frac{1}{8}\varepsilon^4 \sin^4\theta + \text{etc.}\right],$$

$$\frac{ad\omega}{b \cos\Psi} = \frac{d\sin\theta}{(\sin^2\Psi - \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} \operatorname{cosin}^2\vartheta} \left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2\theta - \frac{1}{8}\varepsilon^4 \sin^4\theta + \text{etc.}\right].$$

Si l'on écrit la première de ces équations comme il suit,

$$\frac{ds}{b} = \frac{d\sin\theta}{(\sin^2\Psi - \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{\sin^2\theta \, d\sin\theta}{(\sin^2\Psi - \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{8}\varepsilon^4 \frac{\sin^4\theta \, d\sin\theta}{(\sin^2\Psi - \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} + \text{etc.} ;$$

on trouvera pour son intégrale complète, en déterminant la constante arbitraire de manière que s s'évanouisse lorsque θ est égal à Θ,

$$\frac{s}{b} = \begin{cases} \left[1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2\sin^2\Psi - \frac{3}{64}\varepsilon^4\sin^4\Psi + \text{etc.}\right].\left[\text{angle.sin.}\frac{\sin\theta}{\sin\Psi} - \text{angle.sin.}\frac{\sin\Theta}{\sin\Psi}\right] \\ -\left[\frac{1}{4}\varepsilon^2\sin^2\Psi - \frac{3}{64}\varepsilon^4\sin^4\Psi + \text{etc.}\right].\left[\frac{\sin\theta}{\sin\Psi}\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\Psi}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\sin\Theta}{\sin\Psi}\left(1 - \frac{\sin^2\Theta}{\sin^2\Psi}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ +\left[\frac{1}{32}\varepsilon^4\sin^4\Psi - \text{etc.}\right].\left[\frac{\sin^3\theta}{\sin^3\Psi}\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\Psi}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\sin^3\Theta}{\sin^3\Psi}\left(1 - \frac{\sin^2\Theta}{\sin^2\Psi}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \end{cases}$$

L'autre équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{a}{b}\,d\omega = \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^4 + \text{etc.}\right)\frac{\cos\Psi.\,d\sin\theta}{\cos^2\theta\,(\sin^2\Psi - \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{3}{16}\varepsilon^4 + \text{etc.}\right)\frac{\cos\Psi\,d\sin\theta}{(\sin^2\Psi - \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{16}\varepsilon^4\cos\Psi.d\left[\frac{\sin\theta}{\sin\Psi}\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\Psi}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

et l'on a pour son intégrale complète, en déterminant la constante arbitraire de façon que ω se réduise à zéro lorsque θ est égal à Θ,

$$\frac{a}{b}\omega = \begin{cases} \left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^4 + \text{etc.}\right].\left[\text{angle.sin.}\frac{\tang\theta}{\tang\Psi} - \text{angle.sin.}\frac{\tang\Theta}{\tang\Psi}\right] \\ -\left[\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{3}{16}\varepsilon^4 + \text{etc.}\right]\cos\Psi\left[\text{angle.sin.}\frac{\sin\theta}{\sin\Psi} - \text{angle.sin}\,\frac{\sin\Theta}{\sin\Psi}\right] \\ -\left[\frac{1}{16}\varepsilon^4 + \text{etc.}\right]\cos\Psi\left[\frac{\sin\theta}{\sin\Psi}\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\Psi}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\sin\Theta}{\sin\Psi}\left(1 - \frac{\sin^2\Theta}{\sin^2\Psi}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \end{cases}$$

En faisant $\varepsilon = 0$, ou $a = b$, dans les expressions de s et ω, et en désignant par σ et ϖ ce que deviennent alors s et ω; l'on a

$$\frac{\sigma}{b} = \text{angle.sin.}\frac{\sin\theta}{\sin\Psi} - \text{angle.sin.}\frac{\sin\Theta}{\sin\Psi},$$

$$\varpi = \text{angle.sin.}\frac{\tang\theta}{\tang\Psi} - \text{angle.sin.}\frac{\tang\Theta}{\tang\Psi}.$$

La première de ces équations est l'expression de la longueur de la ligne de plus courte distance σ décrite sur la surface d'une sphère du rayon b, et terminée à deux méridiens dont la différence de longitude ϖ est un angle donné par la seconde de ces équations.

III. La ligne la plus courte est, dans ce cas, un arc de grand cercle de la sphère du rayon a ou b, et forme avec les arcs de méridiens compris entre le pôle de l'équateur et ses extrémités, un triangle sphérique dont les côtés sont

$b(q-\Theta)$, $b(q-\theta)$, et les angles respectivement opposés à ces côtés, α, A.

En effet, en faisant $\frac{c}{b} = u$, et prenant les sinus des angles des deux équations ci-dessus, on peut d'abord les mettre sous cette forme :

$$\sin\left(u + \text{angle.sin.}\frac{\sin\Theta}{\sin\Psi}\right)\sin\Psi = \sin\theta = \operatorname{cosin} u \sin\Theta + \sin u\,(\sin^2\Psi - \sin^2\Theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sin\left(\varpi + \text{angle.sin.}\frac{\operatorname{tang}\Theta}{\operatorname{tang}\Psi}\right)\operatorname{tang}\Psi = \operatorname{tang}\theta = \operatorname{cosin}\varpi \operatorname{tang}\Theta + \sin\varpi\,(\operatorname{tang}^2\Psi - \operatorname{tang}^2\Theta)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais l'équation $\operatorname{cosin}\Psi = \sin A \operatorname{cosin}\Theta$ donnant

$$(\sin^2\Psi - \sin^2\Theta)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{cosin} A \operatorname{cosin}\Theta \ldots \text{et} \ldots (\operatorname{tang}^2\Psi - \operatorname{tang}^2\Theta)^{\frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{cosin} A}{\sin A \operatorname{cosin}\Theta},$$

il s'ensuit que les équations précédentes deviennent

$$\sin\theta = \operatorname{cosin} u \sin\Theta + \sin u \operatorname{cosin}\Theta \operatorname{cosin} A$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\sin\varpi \operatorname{cosin} A + \operatorname{cosin}\varpi \sin A \sin\Theta}{\sin A \operatorname{cosin}\Theta}.$$

Nous avons d'ailleurs trouvé ci-dessus

$$\sin\alpha \operatorname{cosin}\theta = \sin A \operatorname{cosin}\Theta.$$

Ces trois formules sont évidemment à un triangle sphérique dont les côtés sont, ainsi que nous l'avons dit, u, $(q-\Theta)$, $(q-\theta)$, et les angles respectivement opposés à ces mêmes côtés, ϖ, α, A; et elles renferment entre elles ces six quantités combinées quatre à quatre. Il serait facile d'en déduire les douze autres qui servent, conjointement avec celles-ci, à résoudre un triangle sphérique dans tous les cas; nous en indiquerons seulement la manière.

Pour cet effet, écrivons les trois équations ci-dessus dans l'ordre suivant :

(1) $$\sin\alpha \sin\theta = \sin A \cos\Theta.$$

(2) $$\sin\theta = \operatorname{cosin} u \sin\Theta + \sin u \operatorname{cosin}\Theta \operatorname{cosin} A.$$

(3) $$\sin\theta \sin A \operatorname{cosin}\Theta = \operatorname{cosin}\theta \sin\varpi \operatorname{cosin} A + \operatorname{cosin}\theta \operatorname{cosin}\varpi \sin A \sin\Theta.$$

En éliminant successivement les quantités Θ, θ et A, au moyen des équations (1) et (2), (1) et (3), (2) et (3), on aura les neuf formules (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12), résultant de cette élimination. Éliminant ensuite le côté θ des équations (1) et (10) et (7) et (10), et l'angle A des équations (4) et (10), l'on aura les trois autres formules (13), (14), (15).

IV. Soient maintenant t et ν deux angles tels que l'on ait

$$\sin t = \frac{\sin\theta}{\sin\Psi} \ldots\ldots \text{et} \ldots\ldots \sin\nu = \frac{\sin\Theta}{\sin\Psi}.$$

En substituant ces valeurs et celles de σ et ϖ dans les expressions de s et ω, on trouve

$$s=\left[1+\frac{1}{4}\varepsilon^2\sin^2\Psi-\frac{3}{64}\varepsilon^4\sin^4\Psi+\text{etc.}\right]\sigma-b\left[\frac{1}{4}\varepsilon^2\sin^2\Psi-\frac{3}{64}\varepsilon^4\sin^4\Psi+\text{etc.}\right]$$

$$[\sin t\cos t-\sin\nu\cos\nu]+b\left[\frac{1}{32}\varepsilon^4\sin^4\Psi-\text{etc.}\right][\sin^3 t\cos t-\sin^3\nu\cos\nu]+\text{etc.}$$

$$\frac{a}{b}\omega=\left[1+\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{1}{4}\varepsilon^4+\text{etc.}\right]\varpi-\left[\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{3}{16}\varepsilon^4+\text{etc.}\right]u\cos\Psi$$

$$-\left[\frac{1}{16}\varepsilon^4+\text{etc.}\right]\cos\Psi[\sin t\cos t-\sin\nu\cos\nu].$$

Or on a ces équations,

$$\sin t\cos t-\sin\nu\cos\nu=\sin(t-\nu)\cos(t+\nu)$$

$$\sin^3 t\cos t-\sin^3\nu\cos\nu=\frac{1}{2}\sin(t-\nu)\cos(t+\nu)-\frac{1}{4}\sin 2(t-\nu)\cos 2(t+\nu),$$

qui deviennent, à raison de ce que $t-\nu=u$ et $t+\nu=2\nu+u$, et en se rappelant que nous avons fait $\frac{\sigma}{b}=u$,

$$\sin t\cos t-\sin\nu\cos\nu=\sin u\cos(2\nu+u).$$

$$\sin^3 t\cos t-\sin^3\nu\cos\nu=\frac{1}{2}\sin u\cos(2\nu+u)-\frac{1}{4}\sin 2u\cos(4\nu+2u).$$

Si l'on substitue les valeurs précédentes dans les expressions de s et ω trouvées plus haut, l'on aura

$$s=\left[1+\frac{1}{4}\varepsilon^2\sin^2\Psi-\frac{3}{64}\varepsilon^4\sin^4\Psi+\text{etc.}\right]\sigma$$

$$-b\left[\frac{1}{4}\varepsilon^2\sin^2\Psi-\frac{3}{64}\varepsilon^4\sin^4\Psi+\text{etc.}\right]\sin u\cos(2\nu+u)$$

$$+b\left[\frac{1}{64}\varepsilon^4\sin^4\Psi-\text{etc.}\right]\left[\sin u\cos(2\nu+u)-\frac{1}{2}\sin 2u\cos(4\nu+2u)\right].$$

$$\frac{a}{b}=\left[1+\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{1}{4}\varepsilon^4+\text{etc.}\right]\varpi-\left[\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{3}{16}\varepsilon^4+\text{etc.}\right]u\cos\Psi$$

$$-\left[\frac{1}{16}\varepsilon^4+\text{etc.}\right]\cos\Psi\sin u\cos(2\nu+u),$$

et si l'on fait attention que $\frac{b}{a}=\frac{1}{(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}=1-\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{8}\varepsilon^4-\text{etc.}$, on pourra

encore écrire les deux équations comme il suit :

$$s = \left[1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin^2\Psi - \frac{3}{64}\varepsilon^4 \sin^4\Psi + \text{etc.}\right]\sigma$$

$$- b\left[\frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin^2\Psi - \frac{1}{16}\varepsilon^4 \sin^4\Psi + \text{etc.}\right] \sin u \cos(2\nu + u)$$

$$- b\left[\frac{1}{128}\varepsilon^4 \sin^4\Psi - \text{etc.}\right] \sin 2u \cos(4\nu + 2u) + \text{etc.}$$

$$\omega = \left[1 - \frac{3}{8}\varepsilon^4 + \text{etc.}\right]\varpi - \left[\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{7}{16}\varepsilon^4 + \text{etc.}\right] u \cos\Psi$$

$$- \left[\frac{1}{16}\varepsilon^4 + \text{etc.}\right] \cos\Psi \sin u \cos(2\nu + u).$$

Telles sont les valeurs les plus simples de s et ω qu'il soit possible d'obtenir.

Dans les applications que l'on fait de ces formules à la pratique de la Géodésie, c'est ordinairement la ligne de plus courte distance s qui est donnée, et il s'agit de tirer la valeur de l'arc σ ou de l'angle u de l'avant-dernière équation, ce qui ne peut se faire que d'une manière approchée, à cause de sa complication ; mais en faisant pour plus de simplicité $\frac{s}{b} = U$, l'avant-dernière équation précédente a la forme

$$U = Mu - N \sin u \cos(2\nu + u) - P \sin 2u \cos(4\nu + 2u);$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{U}{M} + \frac{N}{M} \sin u \cos(2\nu + u) + \frac{P}{M} \sin 2u \cos(4\nu + 2u).$$

En n'ayant d'abord égard qu'aux termes de l'ordre ε^2, on a

$$u = \frac{U}{M} + \frac{N}{M} \sin U \cos(2\nu + U);$$

ensuite

$$\sin u = \frac{1}{M} \sin U + \frac{N}{M} \sin U \cos(2\nu + U)$$

$$\sin 2u = \frac{1}{M} \sin 2U + \frac{N}{M} \sin 2U \cos(2\nu + U);$$

ainsi, à fort peu-près,

$$u = \frac{U}{M} + \frac{N}{M^2} \sin U \cos(2\nu + U) + \frac{1}{4M^2} \sin 2U [N^2 + (N^2 + 4MP) \cos(4\nu + 2U)].$$

Partant,

$$u = \left[1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin^2\Psi + \frac{7}{64}\varepsilon^4 \sin^4\Psi - \text{etc.}\right] U$$
$$+ \left[\frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin^2\Psi - \frac{3}{16}\varepsilon^4 \sin^4\Psi + \text{etc.}\right] \sin U \cos(2\nu + U)$$
$$+ \left[\frac{1}{128}\varepsilon^4 \sin^4\Psi - \text{etc.}\right] \sin 2U\,(2 + 3\cos(4\nu + 2U)) + \text{etc.}$$

Dans la plupart des cas l'on peut se permettre de négliger, dans les formules précédentes, les termes multipliés par ε^4 qui est en effet un très-petit coefficient. Les formules précédentes se simplifient alors considérablement, et l'on a

$$u = U - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin^2\Psi\,[U - \sin U \cos(2\nu + U)]$$
$$\omega = \varpi - \frac{1}{2}\varepsilon^2 u \cos\Psi.$$

Lorsque l'angle A est nul, l'angle Ψ est égal au quadrant, et partant, l'angle ω est égal à zéro. Dans ce cas, la ligne de plus courte distance se confond avec le méridien qui passe par ses extrémités, et s désigne un arc de ce méridien; donc puisqu'alors $\nu = \Theta$, et $u = (\theta - \Theta)$, on a pour l'expression de cet arc

$$s = b\left[1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 + \text{etc.}\right] u - b\left[\frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{1}{16}\varepsilon^4 + \text{etc.}\right] \sin u \cos(2\Theta + u)$$
$$- b\left[\frac{1}{128}\varepsilon^4 - \text{etc.}\right] \sin 2u \cos(4\Theta + 2u) - \text{etc.}$$

On peut tirer de cette équation une valeur approchée de u qui est utile dans beaucoup de cas; car l'on a d'abord

$$u = \left[1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{7}{64}\varepsilon^4 - \text{etc.}\right] U + \left[\frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{16}\varepsilon^4 + \text{etc.}\right] \sin U \cos(2\Theta + U)$$
$$+ \left[\frac{1}{128}\varepsilon^4 - \text{etc.}\right] \sin 2U\,(2 + 3\cos(4\Theta + 2U) + \text{etc.};$$

et en négligeant comme plus haut les termes qui ont ε^4 pour facteur, il vient ensuite

$$u = U - \frac{1}{4}\varepsilon^2\,[U - \sin U \cos(2\Theta + u)].$$

V. Proposons-nous maintenant de déterminer les angles θ et Θ au moyen des latitudes de chaque extrémité de la ligne de plus courte distance. Pour cet effet, soient λ et φ les latitudes correspondantes à Θ et θ respectivement. Il est clair que λ est ce que devient φ lorsque θ devient égal à Θ; ainsi, considérant le méridien qui passe par l'extrémité de la courbe, dont les coordonnées sont x et y,

et qui fait l'angle ω, avec le méridien passant par l'autre extrémité on aura

$$\frac{x}{n} = \frac{b}{a} \text{ tang. } \theta.$$

D'un autre côté, en désignant par m la sous-normale dans l'ellipse du méridien, son expression différentielle est $m = x\left(\frac{dx}{dn}\right)$; et elle devient $m = \frac{b^2}{a^2} n$, en y substituant la valeur $x dx = -\frac{b^2}{a^2} n\, dn$ qui se tire, par la différentiation, de l'équation à l'ellipse.

Or dans le triangle formé par la normale, l'abscisse x et l'ordonnée n, on a

$$\frac{x}{m} = \frac{x}{n}\frac{a^2}{b^2} = \text{tang } \varphi.$$

Et partant, en mettant dans cette équation pour $\frac{x}{n}$ sa valeur précédente,

$$\text{tang } \theta = \frac{b}{a} \text{ tang } \varphi;$$

on a pareillement

$$\text{tang. } \Theta = \frac{b}{a} \text{ tang } \lambda.$$

Ainsi, au moyen de ces dernières équations, les angles θ *et* Θ qui entrent dans les formules des articles précédens, pourront être exprimés en fonction des latitudes respectives φ et λ des extrémités de la courbe.

VI. De l'avant-dernière équation l'on tire, en faisant pour abréger, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$,

$$\sin \theta = \frac{x}{b} = \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos \theta = \frac{n}{a} = \frac{\cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ces équations ont pour différentielles

$$d \sin \theta = \frac{dx}{b} = \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

$$d \cos \theta = \frac{dn}{a} = \frac{(1 - e^2)\, d\varphi \sin \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

En substituant dans les équations

$$Cds = n^2 d\omega ,$$

$$C^2(dx^2 + dz^2) = n^2(n^2 - C^2)d\omega^2 ,$$

les valeurs de n^2, dx^2, dn^2 que donnent les précédentes, l'on a ces nouvelles équations, qui sont immédiatement fonction de la latitude φ,

$$ds = a(1-e^2)\left[\frac{a^2}{a^2 - C^2e^2}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{d\sin\varphi}{\left(\left(\frac{a^2 - C^2}{a^2 - C^2e^2}\right) - \sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

$$d\omega = (1 - e^2)\left[\frac{C^2}{a^2 - C^2e^2}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{d\sin\varphi}{\cos^2\varphi\left(\left(\frac{a^2 - C^2}{a^2 - C^2e^2}\right) - \sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Soit, pour plus de simplicité,

$$\sin^2\chi = \frac{a^2 - C^2}{a^2 - C^2e^2},$$

en faisant attention que

$$(1 - e^2)\left[\frac{a^2}{a^2 - C^2e^2}\right]^{\frac{1}{2}} = (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}(1 - e^2\sin^2\chi)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$(1 - e^2)\left[\frac{C^2}{a^2 - C^2e^2}\right]^{\frac{1}{2}} = (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}\cos\chi ,$$

les deux équations précédentes peuvent être écrites comme il suit :

$$ds = a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}(1 - e^2\sin^2\chi)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d\sin\varphi}{(\sin^2\chi - \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\right) \times \left(\frac{1}{1 - e^2\sin^2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$d\omega = (1-e^2)^{\frac{1}{2}}\cos\chi\left(\frac{d\sin\varphi}{\cos^2\varphi(\sin^2\chi - \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\right) \times \left(\frac{1}{1 - e^2\sin^2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour intégrer ces équations, développons le dernier facteur du second membre de chacune ; nous aurons, en nous bornant aux termes de l'ordre e^4,

$$\left(\frac{1}{1 - e^2\sin^2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2\varphi + \frac{15}{8}e^4\sin^4\varphi + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{1}{1 - e^2\sin^2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi + \frac{3}{8}e^4\sin^4\varphi + \text{etc.}$$

Cette dernière équation peut s'écrire comme il suit :

$$\left(\frac{1}{1-e^2\sin^2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\text{etc.}\right)-\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\text{etc.}\right)\cos^2\varphi$$
$$-\left(\frac{3}{8}e^4+\text{etc.}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\ldots\ldots$$

au moyen de quoi les équations différentielles précédentes deviennent

$$\frac{ds}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}(1-e^2\sin^2\chi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{d\sin\varphi}{(\sin^2\chi-\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\left[1+\frac{3}{2}e^2\sin^2\varphi+\frac{15}{8}e^4\sin^4\varphi+\text{etc.}\right],$$

$$\frac{d\omega}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\cos\chi} = \frac{d\sin\omega}{\cos^2\varphi(\sin^2\chi-\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\left[\left(1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\text{etc.}\right)-\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\text{etc.}\right)\cos^2\varphi\right.$$
$$\left.-\left(\frac{3}{8}e^4+\text{etc.}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\ldots\ldots,\right]$$

Les intégrales de ces équations étant prises de manière que s et ω s'évanouissent lorsque φ devient égal à λ, l'on a; en commençant par l'avant-dernière équation,

$$\frac{s}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}(1-e^2\sin^2\chi)^{\frac{1}{2}}} = \left\{\begin{array}{l}\left[1+\frac{3}{4}e^2\sin^2\chi+\frac{45}{64}e^4\sin^4\chi+\text{etc.}\right]\\ \times\left[\text{angle sin}\frac{\sin\varphi}{\sin\chi}-\text{angle sin}\frac{\sin\lambda}{\sin\chi}\right]\\ -\left[\frac{3}{4}e^2\sin^2\chi+\frac{45}{64}e^4\sin^4\chi+\text{etc.}\right]\\ \times\left[\frac{\sin\varphi}{\sin\chi}\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\chi}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{\sin\lambda}{\sin\chi}\left(1-\frac{\sin^2\lambda}{\sin^2\chi}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\ -\left[\frac{15}{32}e^4\sin^4\chi+\text{etc.}\right]\\ \times\left[\frac{\sin^3\varphi}{\sin^3\chi}\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\chi}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{\sin^3\lambda}{\sin^3\chi}\left(1-\frac{\sin^2\lambda}{\sin^2\chi}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-\text{etc.}\end{array}\right.$$

Soient pour abréger,

$$\sin.m = \frac{\sin\varphi}{\sin\chi}\ldots\quad \sin.n = \frac{\sin\lambda}{\sin\chi},$$
$$v = m-n;$$

l'équation précédente prendra cette forme :

$$\frac{s}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}(1-e^2\sin^2\chi)^{\frac{1}{2}}} = \left[1+\frac{3}{4}e^2\sin^2\chi+\frac{45}{64}e^4\sin^4\chi+\text{etc.}\right]v$$
$$-\left[\frac{3}{4}e^2\sin^2\chi+\frac{45}{64}e^4\sin^4\chi+\text{etc.}\right]\times[\sin m\cos m-\sin n\cos n]-\left[\frac{15}{32}e^4\sin^4\chi+\text{etc.}\right]$$
$$\times[\sin^3 m\cos m-\sin^3 n\cos n]+\text{etc.},$$

laquelle devient, en multipliant par $(1 - e^2 \sin^2 \chi)^{\frac{1}{2}}$,

$$\frac{s}{b} = \left[1 + \frac{1}{4} e^2 \sin^2 \chi + \frac{13}{64} e^4 \sin^4 \chi + \text{etc.}\right] v$$

$$- \left[\frac{3}{4} e^2 \sin^2 \chi + \frac{21}{64} e^4 \sin^4 \chi + \text{etc.}\right] \times [\sin m \cos m - \sin n \cos n] - \left[\frac{15}{32} e^4 \sin^4 \chi + \text{etc.}\right]$$

$$\times [\sin^3 m \cos m - \sin^3 n \cos n] + \text{etc.}$$

L'intégrale de l'autre équation sera de la forme suivante :

$$\frac{\omega}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \cos \chi} = \begin{cases} \left[1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \text{etc.}\right] \frac{1}{\cos \chi} \left[\text{angle sin} \frac{\tang \varphi}{\tang \chi} - \text{angle sin} \frac{\tang \lambda}{\tang \chi}\right] \\ - M \times \left[\text{angle sin} \frac{\sin \varphi}{\sin \chi} - \text{angle sin} \frac{\sin \lambda}{\sin \chi}\right] \\ + P \times \left[\frac{\sin \varphi}{\sin \chi}\left(1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \chi}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\sin \lambda}{\sin \chi}\left(1 - \frac{\sin^2 \lambda}{\sin^2 \chi}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \text{etc.} \end{cases}$$

Soit pour abréger,

$$\sin p = \frac{\tang \varphi}{\tang \chi} \ldots \quad \sin q = \frac{\tang \lambda}{\tang \chi},$$

$$\pi = p - q,$$

l'équation précédente se changera en celle-ci,

$$\frac{\omega}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \cos \chi} = \left[1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \text{etc.}\right] \frac{\pi}{\cos \chi} - Mv$$

$$+ P \times [\sin m \cos m - \sin n \cos n] - \text{etc.},$$

laquelle devient, en multipliant par $(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \cos \chi$ et faisant attention que $e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \text{etc.} = \left(\frac{1}{1-e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$\omega = \pi - Nv \cos \chi + Q \cos \chi (\sin m \cos m - \sin n \cos n) + \text{etc.}$$

Or on a ces équations,

$$\sin m \cos m - \sin n \cos n = \sin (m - n) \cos (m + n),$$

$$\sin^3 m \cos m - \sin^3 n \cos n = \frac{1}{2} \sin (m-n) \cos (m+n) - \frac{1}{4} \sin 2(m-n) \cos 2(m+n),$$

qui deviennent, à raison de ce que $(m-n)=v$, $m+n=(2n+v)$,

$$\sin m \cos m - \sin n \cos n = \sin v \cos(2n+v),$$

$$\sin^3 m \cos m - \sin^3 n \cos n = \frac{1}{2}\sin v \cos(2n+v) - \frac{1}{4}\sin 2v \cos 2(2n+v).$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de $\frac{s}{b}$ et ω ci-dessus, on trouve les formules suivantes :

$$\frac{s}{b} = \left[1 + \frac{1}{4}e^2\sin^2\chi + \frac{13}{64}e^4\sin^4\chi + \text{etc.}\right]v - \left[\frac{3}{4}e^2\sin^2\chi + \frac{9}{16}e^4\sin^4\chi + \text{etc.}\right]$$
$$\sin v \cos(2n+v) + \left[\frac{15}{128}e^4\sin^4\chi + \text{etc.}\right]\sin 2v \cos 2(2n+v) - \text{etc.}$$

$$\omega = \pi - Nv\cos\chi + Q\sin v\cos(2n+v)\cos\chi \ldots \text{etc.}$$

qui sont les plus simples possibles.

La valeur de s que donne l'avant-dernière équation n'est point celle dont on a ordinairement besoin dans la pratique, au contraire, le plus souvent cette valeur est donnée, et il s'agit d'en tirer celle de v ; mais on ne peut y parvenir que par approximation, à cause de la forme compliquée de cette équation, dans laquelle les sinus et cosinus de l'angle inconnu v se trouvent mêlés avec l'angle : cependant cette formule,

$$v = \left[1 - \frac{1}{4}e^2\sin^2\chi - \frac{3}{64}e^4\sin^4\chi - \text{etc.}\right]U + \left[\frac{3}{4}e^2\sin^2\chi + \frac{3}{16}e^4\sin^4\chi + \text{etc.}\right]\sin U\cos(2n+U)$$
$$+ \left[\frac{1}{128}e^4\sin^4\chi + \text{etc.}\right]\sin 2U(18 + 3\cos(4n+2U)) + \text{etc.}$$

que l'on obtient en procédant comme dans l'art. IV, donne pour v une valeur toujours suffisante pour la pratique ; on peut même se permettre, dans la plupart des cas, de négliger dans son expression, ainsi que dans celle de ω, les termes multipliés par e^4 qui est un très-petit coefficient. On a alors ces formules très-simples,

$$v = U - \frac{1}{4}e^2\sin^2\chi\,[U - 3\sin U\cos(2n+U)],$$

$$\omega = \pi - \frac{1}{2}e^2 v\cos\chi.$$

Lorsque l'angle A est nul, l'angle χ est égal au quadrant, et l'angle ω est aussi nul. Dans ce cas la ligne de plus courte distance se confond avec le méridien qui passe par ses extrémités, et s est un arc de méridien compris entre

les parallèles dont les latitudes sont φ et λ; ainsi $n = \lambda$ et $\nu = (\varphi - \lambda)$, et l'expression de cet arc est

$$s = b\left[1 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{13}{64}e^4 + \text{etc.}\right]\nu - b\left[\frac{3}{4}e^2 + \frac{9}{16}e^4 + \text{etc.}\right]\sin\nu\cos(2\lambda + \nu)$$
$$+ \left[\frac{15}{128}e^4 + \text{etc.}\right]\sin 2\nu\cos 2(2\lambda + \nu).$$

On peut tirer de cette équation une valeur approchée de ν, analogue à celle ci-dessus, dont on a besoin en plusieurs cas; on trouve d'abord

$$\nu = \left[1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \text{etc.}\right]U + \left[\frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{15}e^4 + \text{etc.}\right]\sin U\cos(2\lambda + U)$$
$$+ \left[\frac{1}{128}e^4 + \text{etc.}\right]\sin 2U(18 + 3\cos(4\lambda + 2U);$$

équation qui devient ensuite, en se permettant d'y négliger, comme plus haut, les termes qui ont e^4 pour facteur,

$$\nu = U - \frac{1}{4}e^2[U - 3\sin.U\cos(2\lambda + U)].$$

VII. Il s'agit maintenant de déterminer l'angle χ qui entre dans les formules précédentes. Pour cela, observons que par supposition on a

$$C^2 = a^2\left(\frac{\cos^2\chi}{1 - e^2\sin^2\chi}\right);$$

mais x étant ce que devient n lorsque φ devient λ, l'équation $C = x\sin A$ donne, en y substituant la valeur de x,

$$C^2 = a^2\sin^2 A\left(\frac{\cos^2\lambda}{1 - e^2\sin^2\lambda}\right).$$

En comparant entre elles ces deux valeurs de C^2, l'on a

$$\frac{\cos^2\chi}{1 - e^2\sin^2\chi} = \sin^2 A\left(\frac{\cos^2\lambda}{1 - e^2\sin^2\lambda}\right).$$

Soit Θ un angle tel que l'on ait

$$\text{tang}\,\Theta = \frac{b}{a}\text{tang}\,\lambda,$$

alors l'équation précédente pourra se mettre sous cette forme :

$$\text{tang}^2\chi = \frac{1 - \sin^2 A\cos^2\Theta}{(1 - e^2)\sin^2 A\cos^2\Theta}.$$

Soit encore Ψ un angle tel que l'on ait

$$\cos\Psi = \sin A\cos\Theta,$$

on aura finalement, à cause de $a^2(1 - e^2) = b^2$,

$$\text{tang}\,\chi = \frac{a}{b}\text{tang}\,\Psi.$$

La latitude λ étant connue, la valeur de l'angle χ le devient à l'aide des trois équations précédentes.

Les équations trouvées ci-dessus, savoir :

$$\sin m = \frac{\sin \varphi}{\sin \chi} \ldots \quad \text{et} \ldots \quad \sin p = \frac{\tang \varphi}{\tang \chi}$$

donnent la suivante :

$$\tang p = \cos \chi \tang m.$$

Pareillement les équations

$$\sin n = \frac{\sin \lambda}{\sin \chi} \ldots \quad \text{et} \ldots \quad \sin q = \frac{\tang \lambda}{\tang \chi}$$

donnent la suivante :

$$\tang q = \cos \chi \tang n,$$

et en éliminant $\cos \chi$ de ces équations, il vient

$$\tang m \tang q = \tang n \tang p.$$

On pourrait douter si les angles m et n, p et q sont toujours possibles, et partant, si les valeurs de s et ω se présentent toujours sous des formes réelles. Il est facile de dissiper ce doute. En effet, il est d'abord évident, par les équations précédentes, que si les angles m et n sont possibles, les angles p et q le seront aussi. C'est ce qui peut se démontrer indépendamment de ces équations; car si l'on substitue dans l'équation

$$\sin \alpha \cos \theta = \sin A \cos \Theta$$

les valeurs de $\cos \theta$ et $\cos \Theta$, qui sont

$$\cos \theta = \frac{\cos \Phi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \ldots \quad \text{et} \ldots \quad \cos \Theta = \frac{\cos \lambda}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}},$$

elle deviendra

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\cos \lambda}{\cos \varphi} \left[\frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \lambda} \right]^{\frac{1}{2}},$$

ou sous une autre forme

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \left[\frac{a^2 + b^2 \tang^2 \varphi}{a^2 + b^2 \tang^2 \lambda} \right]^{\frac{1}{2}},$$

et comme l'équation trouvée plus haut entre A, λ et χ donne

$$\sin A = \left[\frac{a^2 + b^2 \tang^2 \lambda}{a^2 + b^2 \tang^2 \chi} \right]^{\frac{1}{2}},$$

on a, en multipliant ces deux équations membre à membre,

$$\sin\alpha = \left[\frac{a^2 + b^2\tang^2\Phi}{a^2 + b^2\tang^2\chi}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Il suit évidemment de ces deux dernières équations que l'angle χ est toujours plus grand que les angles φ et λ, et que par conséquent les valeurs de m et n, p et q sont toujours possibles, et partant, celles de s et ω toujours réelles.

Désignons par μ un arc d'un parallèle à l'équateur dont la latitude est φ, compris entre deux méridiens dont la différence de longitude est ω; le rayon de ce parallèle étant n, il est évident que l'on a pour expression de l'arc qui mesure l'angle ω, $\mu = \omega \times n$. Substituant donc dans cette équation la valeur de n donnée plus haut, on a cette formule très-simple,

$$\mu = a\omega\cos\theta.$$

VIII. Quoique les équations de la forme

$$a\tang\theta = b\tang\varphi,$$

qui donnent immédiatement la valeur de l'un des angles φ ou θ, et dans lesquelles a et b sont des quantités constantes, soient faciles à évaluer, on peut cependant profiter de la propriété qu'elles ont de pouvoir se réduire en séries de formes élégantes et toujours convergentes, quelque grandes que soient ces constantes. Voici une méthode fort simple pour faire ces réductions (p. 129. Géod.).

En différentiant cette équation, on parvient aisément à l'expression suivante:

$$d(\varphi - \theta) = 2\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\left[\frac{\left(\frac{a-b}{a+b}\right) + \cos 2\varphi}{1 + 2\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\cos 2\varphi + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2}\right]d\varphi,$$

ou en faisant, pour simplifier $h = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)$,

$$d(\varphi - \theta) = 2h\,d\left[\frac{h + \cos 2\varphi}{1 + 2h\cos 2\varphi + h^2}\right].$$

Or il est aisé de s'assurer que l'on a généralement cette équation identique, dans laquelle τ est un nombre entier positif,

$$\frac{h^\tau\cos 2(\tau-1)\varphi + h^{\tau-1}\cos 2\tau\varphi}{1 + 2h\cos 2\varphi + h^2} = h^{\tau-1}\cos 2\tau\varphi - \frac{h^{\tau+1}\cos 2\tau\varphi + h^\tau\cos 2(\tau+1)\varphi}{1 + 2h\cos 2\varphi + h^2};$$

en faisant successivement dans cette équation $\tau = 1$, $\tau = 2$, $\tau = 3$, etc., et substituant ensuite l'une dans l'autre les différentes valeurs que donnent ces sup-

positions, l'on trouvera

$$\frac{h+\cos 2\varphi}{1+2h\cos 2\varphi+h^2}=\cos 2\varphi-h\cos 4\varphi+h^2\cos 6\varphi-h^3\cos 8\varphi+h^4\cos 10\varphi-\text{etc.},$$

en négligeant le reste, qui est la même chose que le second terme du second membre de l'équation précédente, où l'on ferait τ égal au nombre des termes de la série, avec un signe positif ou négatif, suivant que τ est un nombre pair ou impair; on a ainsi :

$$d(\varphi-\theta)=2hd\varphi[\cos 2\varphi-h\cos 4\varphi+h^2\cos 6\varphi-h^3\cos 8\varphi+\text{etc.}].$$

Cette équation différentielle a pour intégrale complète

$$\varphi-\theta=h\sin 2\varphi-\frac{1}{2}h^2\sin 4\varphi+\frac{1}{3}h^3\sin 6\varphi-\frac{1}{4}h^4\sin 8\varphi+\text{etc.},$$

la constante étant nulle, attendu que φ et θ s'évanouissent en même temps.

En mettant dans cette équation pour h sa valeur, on a

$$\varphi-\theta=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\sin 2\varphi-\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\sin 4\varphi+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3\sin 6\varphi-\text{etc.}$$

L'équation primitive, $a\,\text{tang}\,\theta=b\,\text{tang}\,\varphi$, reste la même en y permutant a et b, φ et θ; la valeur de $(\theta-\varphi)$ doit donc aussi rester la même, en faisant les mêmes permutations dans la série précédente; au moyen de quoi l'on a

$$\varphi-\theta=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\sin 2\theta+\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\sin 4\theta+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3\sin 6\theta+\text{etc.}$$

Ces séries sont d'autant plus convergentes que a diffère moins de b.

En comparant l'équation $\text{tang}\,m\,\text{tang}\,q=\text{tang}\,n\,\text{tang}\,p$ avec l'équation $a\,\text{tang}\,\theta=b\,\text{tang}\,\varphi$, on voit que pour changer la seconde en la première il faut y mettre $\text{tang}\,m\,\text{tang}\,n$, p et q au lieu de a, b, φ et θ; ainsi en faisant les mêmes changemens dans les séries précédentes, et en remarquant que $\frac{\text{tang}\,m-\text{tang}\,n}{\text{tang}\,m+\text{tang}\,n}=\frac{\sin(m-n)}{\sin(m+n)}$, on trouvera cette double série toujours convergente,

$$p-q=\begin{cases}\left(\frac{\sin(m-n)}{\sin(m+n)}\right)\sin 2p-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)}{\sin(m+n)}\right)^2\sin 4p+\frac{1}{3}\left(\frac{\sin(m-n)}{\sin(m+n)}\right)^3\sin 6p-\text{etc.}\\ \left(\frac{\sin(m-n)}{\sin(m+n)}\right)\sin 2q+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)}{\sin(m+n)}\right)^2\sin 4q+\frac{1}{3}\left(\frac{\sin(m-n)}{\sin(m+n)}\right)^3\sin 6q+\text{etc.}\end{cases}$$

Mais parce que l'on a fait ci-dessus $(m-n)=\nu$, et partant $(m+n)=(2n+\nu)$,

par la substitution de ces valeurs la double série précédente devient

$$\left.\begin{array}{l} p-q= \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \left(\frac{\sin\nu}{\sin(2n+\nu)}\right)\sin 2p-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\nu}{\sin(2n+\nu)}\right)^2\sin 4p+\frac{1}{3}\left(\frac{\sin\nu}{\sin(2n+\nu)}\right)^3\sin 6p-\text{etc.} \\ \left(\frac{\sin\nu}{\sin(2n+\nu)}\right)\sin 2q+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\nu}{\sin(2n+\nu)}\right)^2\sin 4q+\frac{1}{3}\left(\frac{\sin\nu}{\sin(2n+\nu)}\right)^3\sin 6q+\text{etc.} \end{array}$$

IX. Pour faire l'application de nos formules à un cas de pratique, proposons-nous ce problème géodésique :

Connaissant

La ligne s de plus courte distance entre deux points de la surface de la Terre

La latitude λ de l'une des extrémités de cette ligne.

L'angle A que fait cette ligne avec le méridien qui passe par cette extrémité

Trouver

La latitude φ de l'autre extrémité de la ligne de plus courte distance.

L'angle α que fait cette ligne avec le méridien qui passe par cette extrémité.

La différence de longitude ω des méridiens qui la terminent.

L'arc de parallèle μ compris entre ces méridiens sous la latitude cherchée.

L'arc de méridien ζ compris entre les parallèles à l'équateur des extrémités de la ligne.

Voici, par ordre, deux systèmes de formules analogues, qui résolvent complètement ce problème.

Dans ces formules, r désigne le nombre de secondes contenues dans le rayon du cercle, dont la valeur est telle que $r=\frac{1}{\sin 1''}$ à très-peu-près.

PREMIER SYSTÈME.

$$\left\{\begin{aligned}\tang\Theta &= \frac{b}{a}\tang\lambda\\ \cos\Psi &= \sin A\cos\Theta\end{aligned}\right.$$

$$\sin\nu = \frac{\sin\Theta}{\sin\Psi}$$

$$U = \frac{s}{b}r$$

$$u = U - \frac{1}{4}\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)\sin^2\Psi[U - r\sin U\cos(2\nu+U)]$$

$$\sin\theta = \sin\Theta\frac{\sin(u+\nu)}{\sin\nu} = \sin\Psi\sin(u+\nu)$$

$$\tang\varphi = \frac{a}{b}\tang\theta$$

$$\sin\alpha = \sin A\frac{\cos\Theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\Psi}{\cos\theta}$$

$$\sin\varpi = \sin u\frac{\sin\alpha}{\cos\Theta} = \sin u\frac{\sin A}{\cos\theta}$$

$$\omega = \varpi - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)u\cos\Psi$$

$$\mu = \frac{a}{r}\omega\cos\theta$$

$$\gamma = (\theta - \Theta)$$

$$\mathcal{C} = \frac{b}{r}\left[\gamma + \frac{1}{4}\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)[\gamma - r\sin\gamma\cos(2\Theta+\gamma)]\right].$$

SECOND SYSTÈME.

$$\left\{\begin{aligned}\tang\Theta &= \frac{b}{a}\tang\lambda\\ \cos\Psi &= \sin A\cos\Theta\\ \tang\chi &= \frac{a}{b}\tang\Psi\end{aligned}\right.$$

$$\sin n = \frac{\sin\lambda}{\sin\chi}$$

$$U = \frac{s}{b}r$$

$$\nu = U - \frac{1}{4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\sin^2\chi[U - 3r\sin U\cos(2n+U)]$$

$$\sin\varphi = \sin\lambda\frac{\sin(n+\nu)}{\sin\nu} = \sin\chi\sin(n+\nu)$$

$$\tang\theta = \frac{b}{a}\tang\varphi$$

$$\sin\alpha = \sin A\frac{\cos\Theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\Psi}{\cos\theta}$$

$$\left\{\begin{aligned}\sin p &= \frac{\tang\varphi}{\tang\chi} = \frac{\tang\theta}{\tang\Psi}\\ \sin q &= \frac{\tang\lambda}{\tang\chi} = \frac{\tang\Theta}{\tang\Psi}\end{aligned}\right.$$

$$\omega = (p-q) - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\nu\cos\chi$$

$$\mu = \frac{a}{r}\omega\cos\theta$$

$$\delta = (\varphi - \lambda)$$

$$\mathcal{C} = \frac{b}{r}\left[\delta + \frac{1}{4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)[\delta - 3r\sin\delta\cos(2\lambda+\delta)]\right].$$

On voit, en comparant ces deux systèmes de formules, que le premier est un peu plus simple que le second. Les formules du premier système sont conformes à celles que Duséjour a données pour le même objet; les formules du second se rapprochent de celles d'Oriani. J'ai trouvé les unes et les autres en cherchant à me démontrer celles d'Oriani (*Conn. des Temps*, an 1808). (1)

(1) Quoique je me sois convaincu de l'exactitude de ces formules, j'engage le Lecteur, qui a peu d'usage de l'analyse algébrique, à vérifier de son côté tous les calculs qui constituent le Mémoire de M. Henry; il y trouvera certainement de quoi s'exercer.

En supposant l'aplatissement de la Terre ou $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{335}$, l'on a

$a = 6375710,48$ mètres.	$\log a = 6.80452852$
$b = 6356678,51$ mètres.	$\log b = 6.80323031$
$\frac{b}{a} = 0,9970149$	$\log \frac{b}{a} = 9.99870166$
$\frac{r}{b} = 0'',0324485$	$\log \frac{r}{b} = 8.51119482$
$\frac{a}{r} = 30^m,91031$	$\log \frac{a}{r} = 1.49010339$
$\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right) = \varepsilon^2 = 0,00599969$	$\log \varepsilon^2 = 7.77793333$
$\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right) = e^2 = 0,00596120$	$\log e^2 = 7.77533665.$

Exemple.

On a trouvé, par des opérations géodésiques,

La distance de la tour de Strasbourg au point le plus élevé de la montagne dite *Balon des Vosges*, de 89871,9 mètres.

L'angle que fait cette ligne avec le méridien de la tour de Strasbourg, en comptant du midi à l'ouest (*division sexagésimale*)..... 32°.51′. 1″,8

La latitude de la tour de Strasbourg, de..... 48 .34 .57,5

Et l'on demande,

La latitude du Balon;

L'angle que fait la ligne Balon-Strasbourg avec le méridien du Balon;

La différence de longitude de Strasbourg et du Balon;

L'arc du parallèle du Balon compris entre les méridiens de ces deux lieux,

L'arc de méridien compris entre les parallèles de ces mêmes lieux.

Les données du problème sont;

$$s = 87871,9 \text{ mètres}$$
$$\lambda = 48°.34'.57'',5$$
$$A = 32 .51 . 1 ,8.$$

On en tire, à l'aide des formules ci-dessus, les résultats suivans;

PREMIER SYSTÈME.	SECOND SYSTÈME.
$\odot = 48°.29'.51'',5$	$\odot = 48°.29'.51'',5$
$\Psi = 68\ .56\ .\ 0\ ,0$	$\Psi = 68\ .56\ .\ 0\ ,0$
	$\chi = 68\ .59\ .26\ ,6$
$\nu = 53\ .22\ .34\ ,5$	$n' = 53\ .26\ .51\ ,5$
$U = \ 0\ .48\ .26\ ,2$	$U = \ 0\ .48\ .26\ ,2$
$u = \ 0\ .48\ .31\ ,4$	$\nu = \ 0\ .48\ .29\ ,3$
$\theta = 47\ .48\ .58\ ,9$	$\varphi = 47\ .54\ .\ 5\ ,7$
$\varphi = 47\ .54\ .\ 5\ ,7$	$\theta = 47\ .48\ .58\ ,9$
$\alpha = 212\ .21\ .49\ ,6$	$\alpha = 212\ .21\ .49\ ,7$
$\varpi = \ 0\ .39\ .10\ ,6$	$p = 25\ .\ 9\ .16\ ,2$
	$q = 25\ .48\ .28\ ,0$
$\omega = \ 0\ .39\ .\ 8\ ,9$	$\omega = \ 0\ .39\ .\ 8\ ,7$
$\mu = 48750,8$ mètres	$\mu = 48750,7$ mètres
$\gamma = 0°.40'.52'',6$	$\delta = 0°.40'.51'',8$
$\mathfrak{C} = 75708,5$ mètres.	$\mathfrak{C} = 75708,4$ mètres.

On a donc pour les valeurs des quantités qu'il s'agissait de trouver,

$$\varphi = 47°.54'.\ 5'',7$$
$$\alpha = 212\ .21\ .49\ ,7$$
$$\omega = \ 0\ .39\ .\ 8\ ,7$$
$$\left.\begin{matrix}\mu = 48750,7 \\ \mathfrak{C} = 75708,4\end{matrix}\right\} \text{mètres.}$$

En employant les mêmes données, on arrive exactement aux mêmes résultats, à l'aide des formules de Delambre.

C'est-à-dire que

La latitude du Balon des Vosges est de..... $47°.54'.\ 5'',7$

L'azimut de la ligne Strasbourg-Balon avec le mérid. du Balon.. $212\ .21\ .49\ ,7$

La différence de longitude de Strasbourg et du Balon..... $0\ .39\ .\ 8\ ,8$

La différence des méridiens en mètres à la latitude du Balon.. $48750^{m},7$

La différence, en mètres, des parallèles de Strasbourg et du Balon. $75708\ ,4$.

L'azimut de la ligne Strasbourg-Balon avec le méridien du Balon, est compté de même que l'angle de la même ligne avec le méridien de Strasbourg, de 0 à 360°, en allant du midi à l'ouest.

On pourrait appliquer les formules exposées ci-dessus à la résolution de plusieurs autres problèmes intéressans; mais l'on se borne ici au précédent, que l'on avait principalement en vue, à cause de la grande utilité dont il est dans la pratique de la Géodésie].

111. Les deux systèmes de formules précédens, quoique n'étant pas très-compliqués, exigent néanmoins dans leur application un calculateur exercé, mais en les réduisant en Tables, comme l'a fait M. Henry, on abrège singulièrement le travail. Ce qui distingue principalement ces formules des équations (*C*) que j'ai démontrées au n° 5, c'est qu'elles ne sont pas comme celles-ci dépendantes des distances à la méridienne et à la perpendiculaire. Quoi qu'il en soit, puisqu'il est bien prouvé maintenant que les équations (*B*) et (*C*) de ce numéro sont suffisamment exactes, et que leur emploi n'exige l'évaluation d'aucun angle subsidiaire, il est à présumer que les géographes continueront d'en faire usage. Les équations (*B*) semblent même mériter la préférence sur toutes les autres, puisque, pour les soumettre au calcul il ne s'agit, comme ci-dessus, que de connaître les côtés des triangles d'un réseau et un azimut, ainsi que la latitude et la longitude du lieu où cet azimut a été observé. Mais comme il est toujours utile d'arriver aux mêmes résultats par plusieurs voies, je pense que l'on me saura gré d'avoir réuni dans cet Ouvrage toutes les formules géodésiques connues.

SUPPLÉMENT
AU TROISIÈME LIVRE.

Recherche de l'aire d'une zône sphéroïdique.

112. Au lieu d'employer la méthode de la page 181, pour trouver l'expression de l'aire d'une zône sphéroïdique comprise entre l'équateur et un parallèle quelconque, on peut procéder ainsi qu'il suit:

Soit λ la latitude du parallèle que l'on considère, a et b les deux demi-axes de *l'ellipse génératrice du sphéroïde terrestre supposé* de révolution, e son excentricité et s l'arc de méridien dont les latitudes des extrémités sont o et λ.

On a en général pour la différentielle de l'aire Σ de la zône engendrée par la révolution de l'arc s, autour du petit axe b,

$$d\Sigma = 2\pi y ds \quad \text{ou} \quad d\Sigma = 2\pi y dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

De l'équation $b^2y^2 + a^2x^2 = a^2b^2$ qui est celle d'un méridien, en prenant le petit axe pour celui des x, on tire

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^4x^2}{b^4y^2},$$

$$d\Sigma = \frac{2\pi a dx}{b^2}\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)x^2}.$$

Pour intégrer cette équation, l'on remarquera que le second membre pouvant se mettre sous la forme

$$\frac{2\pi a dx}{b^2} \cdot n \sqrt{\frac{b^4}{n^2} + x^2},$$

en y faisant $a^2 - b^2 = n^2$, on a d'abord

$$\Sigma = \frac{2\pi an}{b^2}\int dx\sqrt{\frac{b^4}{n^2}+x^2} + C.$$

Ensuite la fonction irrationnelle étant traitée comme il est dit au n° 160 du *Traité élémentaire de Calcul intégral* de Lacroix, et la constante C, que l'on trouvera égale à $\frac{1}{4}\frac{b^4}{n^2}+\frac{1}{2}\frac{b^4}{n^2}\log\left(\frac{b^2}{n}\right)$, étant déterminée de manière que Σ soit nulle lorsque $x = 0$, on obtiendra

$$\Sigma = \frac{a\pi x}{b^2}\sqrt{b^4+n^2x^2} + \frac{ab^2\pi}{n}\log\left(\frac{nx}{b^2}+\frac{1}{b^2}\sqrt{b^4+n^2x^2}\right);$$

mais l'on sait (*pag.* 126, *équat.* 4, Géod.) que $x = \frac{a(1-e^2)\sin\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}$, ainsi substituant cette valeur dans l'équation précédente et faisant les réductions convenables, on aura

$$\Sigma = \pi b^2\left[\frac{\sin\lambda}{1-e^2\sin^2\lambda}+\frac{1}{e}\log\sqrt{\left(\frac{1+e\sin\lambda}{1-e\sin\lambda}\right)}\right].$$

Si l'on réduit cette expression en série, comme on l'a fait en pareils cas (art. 34 et 78, Géod.), on parviendra à

$$\Sigma = 2\pi ab\left[\sin\lambda - \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\left(\frac{3a+b}{a+b}\right)\sin 3\lambda + \frac{1}{5}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\left(\frac{5a+b}{a+b}\right)\sin 5\lambda - \frac{1}{7}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3\left(\frac{7a+b}{a+b}\right)\sin 7\lambda + \text{etc.}\right],$$

série nouvelle et dont le terme général est évidemment

$$\pm 2\pi ab\left[\left(\frac{1}{2n-1}\right)\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n-1}\left[\frac{(2n-1)a+b}{a+b}\right]\sin(2n-1)\lambda\right],$$

le signe supérieur ayant lieu lorsque le nombre n des termes est impair, et l'inférieur quand n est pair. C'est M. Henry qui vient de me proposer de démontrer cette série.

On voit bien que pour avoir l'expression de l'aire de la surface entière de l'ellipsoïde terrestre il faut doubler l'une des valeurs précédentes de Σ, et y faire en outre $x = b$ ou $\sin\lambda = 1$.

J'observerai, par occasion, qu'il est bien plus facile d'obtenir le volume du sphéroïde dont il s'agit; sur quoi voyez le n° 245 du *Traité de Calcul intégral* cité plus haut.

FIN.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES

Contenues dans le Traité de Géodésie et dans celui-ci, et des noms des principaux Auteurs qui ont écrit sur le même sujet.

(Les chiffres précédés d'un G indiquent les articles du Traité de Géodésie, et ceux qui sont précédés d'un T indiquent les numéros de cet Ouvrage.)

A

Aberration de la lumière, G 2; formules d'aberration, G 116.
Aiguille aimantée, sa déclinaison, T 51.
Aire, ou mesure des surfaces, G 90; T 57—64.
Alidade du cercle répétiteur, G 49 et 135; à pinnules, T 47.
Amplitude d'un arc terrestre, G 91.
Amplitudes des oscillations du pendule, sont constantes dans le vide, T 13; mais diminuent dans un milieu résistant, T 14.
Angle au centre, c'est celui que l'on observe au centre même d'un signal, G 57.
Angle de direction, sert pour réduire un angle de position au centre d'un signal, G 57.
Angle de position, c'est celui que l'on observe près d'un signal dont le centre est inaccessible, G 57.
Angle réducteur, T 103.
Année sydérale, G 5.
Année tropique, G 5.
Aplatissement de la Terre ou ellipticité, G 74; sa valeur déduite de la comparaison des grades mesurés du méridien, G 75; sa valeur déduite des observations du pendule à secondes, T 17.
Apogée, G 4.
Arpentage, son objet, T 57.
Ascension droite, G 7.
Attraction, loi suivant laquelle elle s'exerce, G 6.
Axe du Monde, G 1.
Axe de la Terre, G 8.
Axe d'un projet de route, T 100.
Azimut, G 7. Observation azimutale, G 132. Calcul des angles azimutaux, G 81, T 25 et 111.

B

Baromètre; sa théorie, G 110—111 et T 12; son usage pour mesurer les hauteurs, G 112. Table de Cavendisch pour avoir égard à l'effet capillaire dans les observations barométriques, T pag. 41.
Base, G 46. Instrumens qui servent pour mesurer les bases, G 64 et 67, et T 46. Comment on réduit ces lignes au niveau de la mer, G 66.
Borda invente le *cercle de réflexion* et le *cercle répétiteur*, en profitant d'une idée ingénieuse de Tobie Mayer, pour déterminer le rapport d'un arc à la circonférence, et rend par cela seul d'importans services à la navigation et à l'astronomie. Voyez sa *Description du cercle de réflexion, et l'exposé des opérations j...*

en France en 1787, pour la jonction des observatoires de Paris et de Greenwich, par MM. Cassini, Méchain et Legendre.

Bouguer; son excellent ouvrage sur la *Figure de la Terre*, publié en 1749, renferme toutes les méthodes géodésiques et astronomiques dont il fit usage au Pérou, pour mesurer les trois premiers degrés du méridien.

Boussole; son usage pour lever et orienter les plans, T 54.

Busson-Descars a publié récemment un *Essai sur le Nivellement*, où l'on trouve une théorie complète des meilleurs niveaux.

C

Cagnoli, a publié dernièrement, en italien, une seconde édition de sa *Trigonométrie rectiligne et sphérique*, où l'on trouve quelques préceptes sur les opérations géodésiques et topographiques. Il existe déjà de cet Ouvrage une traduction française par Chompré.

Calquer un dessin, c'est en prendre une copie par superposition, T 103.

Calquoir, pointe qui sert pour suivre les lignes d'un dessin que l'on copie, T 104.

Canevas trigonométrique, *voyez* Triangulation.

Cartes, leurs différentes définitions, T 27, 43 et 44; leurs constructions, T 32—44.

Cassini de Thury conçut l'idée de rapporter tous les points d'une carte d'après leurs distances à une méridienne et à sa perpendiculaire, *Mémoires de l'Acad. des Sciences*, année 1745; a publié l'ouvrage qui a pour titre: *Description géométr. de la France*, etc. Il est le principal auteur de la grande carte de cet Empire, construite d'après son système de projection. *Voyez* G 85.

Centre d'oscillation, T 13.

Cercles polaires, G 3.

Cercle répétiteur; sa description, G 49 et 155; son usage en Géodésie, G 50 et 51, T 18; en Astronomie, G 52, 127, 132.

Chaîne d'arpenteur, T 46.

Chronomètre ou garde-temps, G 131.

Clairaut s'est occupé de la recherche des propriétés de la perpendiculaire à la méridienne terrestre, *Académie des Sciences*, année 1733; a publié un très-bel ouvrage sur la *Théorie de la figure de la Terre*.

Clitomètre ou niveau de pente, T 83 et 84.

Compensateur, G 131.

Compteur, G 125.

Constellation, G 2. Dénomination des principales et moyen de les reconnaître, G 126.

Coup de niveau, T 87.

Courbes, manières de les tracer, T 33, 36 et 39.

Cote, T 87.

Cubature *des solides*, ou calcul des terrasses, T 101.

Cultellation (Méthode de), T 74.

D

Décalquer ou contrépreuver un dessin, c'est en tirer une copie au crayon au moyen d'une autre copie, T 103.

Déclinaison des astres, G 7. Calcul de la déclinaison du Soleil, G 114.

Déclinaison de l'aiguille aimantée, T 51. Manière de l'observer, T 51.

Déclinatoire, T 51.

Degré, la 360e partie de la circonférence. Les longueurs mesurées des degrés des méridiens ne sont pas les mêmes à la même latitude. *Voyez* Grade.

Delambre, a publié en l'an VII un Mémoire sur la *Détermination d'un arc du méridien*, où se trouvent les démonstrations d'un grand nombre de formules géodésiques et astronomiques nouvelles. Il a publié en outre, en janvier 1806, le Tome Ier de la *Base du Système métrique décimal, ou de la mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et de Barcelone, exécutée en 1792 et années suivantes*; son digne collaborateur dans cette belle et importante opération, fut *Méchain*. Il a donné un Mémoire sur les propriétés de la projection stéréographique, inséré parmi ceux de *l'Institut*, Tom. V, etc.

Dépression (Angle de), G 54.

Développement (Projection par), T 75.

Dionis-du-Séjour, a publié dans son *Traité analytique des mouvemens des corps célestes*, Tom. II, des formules pour calculer les latitudes et les longitudes des points fondamentaux d'une carte, dans l'hypothèse que la Terre est un sphéroïde elliptique de révolution, et a exposé les propriétés de la projection de Cassini.

Distance au zénit, G 51.

Distance d'un astre au pôle, G 127.

Distance méridienne, c'est une distance au zénit prise dans le méridien, G *page* 290.
Distance de l'équinoxe au Soleil, G 115.
Division du cercle répétiteur, G 49.
Division de l'alidade du clitomètre, T 84.
Division des surfaces, T 65.

Écliptique, G 3.
Ellipsoïde de révolution, son équation, G 75.
Epure d'une route, T 22.
Équateur, G 1 et 3.
Équation du temps, G 5.
Équation des hauteurs correspondantes, G 121.
Équerre d'arpenteur, T 56.
Équinoxe, G 4.
Équinoxiale (Ligne), G 9.
Étoiles fixes, G 2.
Étoile polaire, G 2 et 126.

Dupain de Montesson, a publié divers ouvrages sur la Topographie, dont l'un a pour titre : *L'Art de lever les plans, appliqué à tout ce qui a rapport à la guerre, à la navigation et à l'architecture civile et rurale. Voyez* la nouvelle édition, par Verkaven.

Euler, et avant lui Lambert, ont analysé les propriétés de la projection stéréographique et des cartes réduites, *Mémoires de Pétersbourg*, année 1777. Euler s'est occupé aussi de la projection conique, Tom. Ier, 1re partie des *Acta Academiæ Petropolitanæ.*
Excentricité de la Terre, sa valeur, G 75.
Excentricité des lunettes du cercle répétiteur, G 53, T 1.
Excès sphérique, G 39 et 68, T 4 et 21.

F

Figure de la Terre; quoiqu'elle soit irrégulière, G 91, on peut, dans les opérations géodésiques, l'assimiler à un sphéroïde elliptique de révolution, G 79, T 5 et 7, et dans la pratique du nivellement topographique, la considérer comme sphérique, T 75.

Flamstéed, a employé dans son *Atlas céleste* une sorte de projection par développement, que l'on a ensuite modifiée, afin que les configurations fussent moins altérées, et qui sert pour former les cartes des Empires, etc. *Voyez* T 39—40.

G

Géodésie, son objet, G 46.
Grade, la 100e partie du quadrant. Valeurs, du grade de l'équateur, G 78 et 137; du grade du méridien, G 78 et 137; du grade de longitude, G 78 et 137.
Gravité. *Voyez* Pesanteur.

H

Hauteur du pôle, G 7 et 9. Manière de la déterminer, G 127.
Hauteur (Angle de), G 54.
Horizon, G 1.
Horloge astronomique. *Voyez* Pendule.

I

Index, G 49.
Isochrone, T 13.

J

Jalon, T 46.
Jolt a rédigé, dans l'*Encyclopédie méthodique*, les articles *Levée des plans, Nivellement*, etc.
Jour vrai ou apparent, G 5.
Jour civil, G 5.
Jour moyen astronomique, *ibid.*
Jour sydéral, *ibid.*

L

Lacroix a publié un *Précis astronomique* servant d'Introduction à la Géographie de Pinkerton, dans lequel il a analysé succinctement les propriétés de toutes les espèce[illegible] de

projections des cartes et indiqué leurs constructions.

Lagrange, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1779, envisage le problème de la projection des cartes sous le point de vue le plus général et comme une transformation des coordonnées, et de sa savante analyse découlent, comme solutions particulières, la projection stéréographique et les cartes réduites, dont Lambert et Euler s'étaient déjà occupés. Il a donné une formule très-simple pour calculer l'aire d'un trapèze sphérique rectangle, etc. *Voyez* G 90.

Lagrive est le premier qui ait donné, dans un petit *Traité de Trigonométrie rectiligne pratique*, des méthodes et des Tables pour réduire les angles à l'horizon et au centre de la station.

Lahire, pour corriger en partie le défaut de la projection de Ptolémée, qui altère plus ou moins la grandeur et la figure des divers pays que l'on représente, a proposé de placer le point de vue à une distance de la surface du globe, égale au sinus de la huitième partie de la circonférence, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1701. Il existe un niveau de son invention.

Laplace a donné le premier une théorie complète du sphéroïde terrestre, *Mécanique céleste*, Tom. II; a résolu, par une méthode purement analytique et très-générale, ces deux questions importantes, savoir, 1°. Quelle est la figure elliptique dans laquelle le plus grand écart des degrés mesurés ou des longueurs observées du pendule à secondes, est plus petit que dans toute autre figure de même espèce? 2°. Lorsque l'hypothèse d'une figure elliptique est dans les limites des erreurs des observations, quelle est celle que les degrés mesurés ou les longueurs observées du pendule indiquent avec le plus de vraisemblance? G 102, T 17. La solution géométrique de cette seconde question, donnée d'abord par Boscovich et citée à la page 63, est vicieuse en ce qu'elle est fondée sur une hypothèse inadmissible, savoir, que les erreurs dans la mesure des arcs du méridien sont proportionnelles à leurs longueurs; il a publié de nouvelles formules pour mesurer les hauteurs par le baromètre, etc.

Latitude, G 9; comment on l'observe, G 127; comment elle se déduit des opérations géodésiques, G 81 et 84, T 24 et 111.

Lefèvre a publié un *Traité d'Arpentage* fort étendu.

Legendre a résolu plusieurs problèmes importans de Géodésie dans les *Mémoires* [illegible] *de l'Académie des Sciences*, année 178[illegible], et a publié ce beau théorème, savoir, que [illegible] triangles sphériques très-peu courbes [illegible] peuvent se résoudre comme les triangles [illegible] lignes, en diminuant chacun de leurs angles du [illegible] de l'excès de leur somme sur deux angles droits, *voyez* son Mémoire imprimé en l'an VII, en tête de celui de Delambre sur la *Détermination de l'arc du méridien*; il a donné une analyse complète des triangles sphéroïdiques, et prouvé que son théorème est encore applicable à ces sortes de triangles, *Mémoires de l'Institut*, 1er semestre de 1806; il a publié une nouvelle méthode pour déterminer l'ellipse qui satisfait le mieux aux mesures des arcs du méridien, etc. *Voyez* sa *Nouvelle Méthode pour la détermination des orbites des comètes*, et G 76.

Lespinasse a publié un *Traité de Nivellement* qui renferme les descriptions d'un grand nombre de niveaux et une exposition du calcul des terrasses.

Levés de détail, T 45—56.

Ligne géodésique, G 70; son équation, G 93, T 7; son rayon de courbure, G 100.

Ligne de collimation, T 47.

Ligne de foi ou index, G 49, T 84.

Ligne horizontale, G 1 et 106.

Ligne verticale, G 1, T 75.

Longitude, G 9; moyens de l'observer, G 131, de la déduire des opérations géodésiques, G 81 et 84, T 24 et 111.

Lorgna a proposé une nouvelle projection dont la propriété est de représenter par des espaces égaux des régions d'égale étendue, *Principj di Geografia-Astronomico-Geometrica*, in *Verona*, 1789, *in*-4°.

Lunette achromatique, T 80.

Lunette d'épreuve, G 49; moyen de s'en passer, T 18.

Lunette méridienne, G 124.

M

Mappemonde, T 27; sa construction, T 32—38.

Mercator et Edward Wright ont, vers la fin du 16e siècle, imaginé la projection des cartes réduites, à l'aide desquelles les marins résolvent différens problèmes de navigation, *voyez* T 44.

Méridienne terrestre, G 9; est une courbe à double courbure sur le sphéroïde irrégulier

G 92; est une courbe plane sur le sphéroïde elliptique de révolution, G 92. Formules pour rectifier un arc du méridien terrestre, connaissant les latitudes de ses extrémités, G 74 et 94; comment on détermine son amplitude quand on connaît sa longueur, T 6.

Mètre, la dix-millionième partie du quart du méridien elliptique, G 75.; son rapport avec la toise du Pérou, *ibid.*

Micrographe, T 106.

Microscope, s'adapte aux instrumens pour lire plus aisément leurs divisions, G 67 et 135.

Mire, T 70.

Nadir, G 7.

Newton découvre la loi de la pesanteur universelle et en déduit pour conséquence que la Terre, douée d'un mouvement de rotation, doit être aplatie vers les pôles et renflée vers l'équateur; c'est sur la connaissance de la figure de notre globe, et sur celle des lois de l'hydrostatique, qu'est fondée la théorie du nivellement, T 75.

Niveau (Ligne et surface de), G 106, T 75 et 76.

Niveau vrai, G 106, T 76.

Niveau apparent, G 106, T 76.

Niveau (Différence de), comment on la détermine, G 106—109 et 110—113, T 26, 87 et 92.

Niveau d'eau, T 78.

Niveau à bulle d'air, T 80.

Niveau à perpendicule, T 83.

Niveau de pente. *Voyez* Clitomètre.

Nivellement géographique, T 26.

Nivellement topographique, T 86.

Nœuds de la Lune, G 8.

Nonius ou vernier, G 49, T 84.

Nutation, G 6. Formules de nutation, G 116.

O

Objectif, T 80.

Obliquité de l'écliptique, G 3.

Oculaire, T 80.

Oriani, dans un ouvrage intitulé: *Opuscoli astronomici, a trattè differens problèmes geodésiques*, dans l'hypothèse que la Terre est un ellipsoïde de révolution, *voyez* la *Connaissance des Temps* pour l'an 1808.

Orientation des plans, G 132, T 51.

Oscillations du pendule, T 13; elles sont isochrones dans un milieu résistant comme dans le vide, T 13 et 14.

P

Pantographe, T 104.

Parallaxe des astres, G 119.

Parallaxe des fils du réticule, G 49, T 80.

Parallèles à l'équateur, G 9; longueur du grade d'un parallèle connu, G 78 et 137.

Passage au méridien; comment l'on détermine l'heure vraie du passage au méridien, G 115 et 117.

Pendule composé, T 13.

Pendule simple, T 13. Mouvement de ce pendule dans le vide, *ibid.* Théorèmes qui en résultent, *ibid.* Mouvement du pendule dans un milieu résistant, T 14; dans la supposition d'un fil extensible, T 15. La position du centre d'oscillation est indépendante de la résistance du milieu dans lequel le pendule est en mouvement, T 110. Expériences d'après lesquelles on détermine la longueur du pendule à secondes et l'intensité de la pesanteur, T 16. Valeur de l'aplatissement de la Terre déduite des longueurs observées de ce pendule, T 17.

Pendule astronomique; manière de la régler par les hauteurs correspondantes du Soleil, G 120; par les hauteurs absolues, G 132; par les observations des étoiles, G 124.

Pente par mètre, T 90.

Périgée, G 4.

Pesanteur; son intensité dans le vide est plus grande que dans un milieu résistant, T p. 153.

Phase des signaux, G 62.

Picard fut le premier qui, à l'aide des méthodes géométriques et astronomiques, mesura en France un arc du méridien, l'an 1669, et qui écrivit un *Traité de Nivellement* où se trouvent la description et l'usage de son niveau à perpendicule; cet Ouvrage fut mis au jour par Lahire, l'an 1728.

Point culminant, c'est celui où l'astre est le plus élevé au-dessus de l'horizon, G pag. 278.

Point de passage ou point à zéro, T 96.

Point de sujétion, T 96.

Point de mire, T 77.

Pôles, G 1.
Polygonométrie, T 62.
Précession des équinoxes, G 5; comment on en tient compte dans les calculs astronomiques, G 115 et 117.
Projection; il y en a de deux sortes, T 27. Théorie des projections des cercles de la sphère, G 42, T 27—31.
PRONY a publié, dans la *Connaissance des Temps* de 1808, page 366, un mémoire sur le *Calcul des longitudes et des latitudes, d'après les distances à la méridienne et à la perpendiculaire, et sur le Calcul inverse.*
PTOLÉMÉE a exposé le premier une des propriétés de la projection stéréographique, dans un ouvrage intitulé: *Sphæra à planetis projectio in planum*, an 1808. Il est l'inventeur de la projection conique. T 38.

Q

Quadrant, ou quart de la circonférence.

R

Raccordement (Courbe de), T 100.
Rayon visuel, droite que l'on conçoit menée de l'œil à l'objet auquel on vise.
Rayon réduit en secondes, G 31 et 137.
Rayon de la Terre, sa valeur, G page 128 et n° 137.
Rayon au pôle, sa valeur, G page 136 et n° 137.
Rayon de l'équateur, sa valeur, G page 136 et n° 137.
Rayon de courbure, du méridien, G 75 et 137, T 9; de l'arc perpendiculaire au méridien, G 81 et 137, T 9; d'une ligne géodésique quelconque, G 100, T 9.
Rayon de l'ellipsoïde osculateur, G 101.
Rectification d'un arc du méridien, G page 130.
Rectification des niveaux, T 81 et 85.
Réduction des cartes, T 103—107.
Réflecteur, G 52.
Réfraction terrestre, G 103 et 105, T 77.
Réfraction astronomique, G 118.
Règles pour mesurer les bases, G 64.
Repères, piquets que l'on enfonce en terre pour reconnaître au besoin la direction d'une ligne, T 92.
Réticule, G 49, T 80.
Retournement, T 81.

S

Signal, G 47.
Signes, G 3.
Son, sa vitesse, G 137.
Sphère, cas où la Terre peut être considérée comme telle, G 106, T 75.
Sphéroïde terrestre, sa théorie, G 91. Équation du sphéroïde elliptique de révolution, G 77.
Solstices, G 4.
Station, lieu où l'on place l'instrument pour observer.
SVANBERG, de l'Académie des Sciences de Stockholm, a publié en 1805 un ouvrage [illegible] pour titre: *Exposition des opérations faites en Laponie, pour la détermination d'un arc du méridien, en 1801, 1802 et 1803, par MM. Ofverborn, Holmquist et Palander.* Un grand nombre de problèmes géodésiques y sont résolus d'une manière nouvelle et élégante. *Voyez* la *Connaissance des Temps* pour 1808, page 466.
Synchrone, T 13.

T

Tables Géodésiques, *voyez* la fin du Traité de Géodésie et la fin de celui-ci.
Talus, T 99.
Temps, sa mesure, G 3.
Temps moyen, G 5.
Temps vrai, ou astronomique, *ibid.*
Temps sydéral, *ibid.*
Thermomètre, s'emploie concurremment avec le baromètre, G 110, T 11 et 12.
Terrasses (Calcul des), T 96.

Topographie, son objet, T 45.

Triangles, leur meilleure condition pour lever la carte d'un pays, G 46 et 47.

Triangles primaires ou du premier ordre, *ibid.*

Triangles secondaires ou du second ordre, *ibid.*

Triangulation, c'est l'assemble des triangles à l'aide desquels on détermine les positions respectives des principaux points d'une carte ou d'un plan, G 46 et 113.

Trigonométrie rectiligne, G 11—17. Résolution approximative des triangles rectilignes, G 31.

Trigonométrie sphérique, G 18—30. Résolution approximative des triangles sphériques, G 31.

V

Vérification d'un travail topographique, T 49; des niveaux, T 81 et 85; d'un nivellement, T 93.

Vernier, son usage, G 49, T 84.

Vîtesse du pendule. *Voyez* Pendule.

Vîtesse du son. *Voyez* Son.

Z

Zénit, G 1.

Fin de la Table alphabétique des matières.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
49	1	$=$	$t = 0$.
52	11 en rem.		Dans la première équation, au lieu de K'^{p} *lisez* K.
78	13 en rem.	on a	on opère.
95	10	Livre V	Livre IV.
136	7	$\frac{BO}{2}$	$\frac{BP}{2}$
139	13 en rem.	mC	mC'.
158	15 en rem.	consiste à	est de
161	7	Axx'	$Ax'y'$
166	10	cercle divisé	cercle de métal divisé.
168	18	excède	diffère de.
178	6	120^m	12^m.
181	3 en rem.	$L' - L$	$L - L'$.
Ibid.	1 *ibid.*	$-\frac{1}{16}e^2$	$-\frac{1}{6}e^2$.
211	équation 2		Restituez au deuxième terme le facteur $+ Y$.
214	13 en rem.	séca	sécante.
Ibid.	5 en rem.	appréciable	sensible.
234	4	vis R	vis P.
247	3	$P'N'$	$p'N'$.

Fautes essentielles à corriger au Traité de Géodésie.

157			Dans le calcul du 2e terme, *ajoutez* tang $L = 9{,}91904$.
170	13	la longitude d'un grade	la longueur d'un grade de longitude.
182	9	$c = 55°.9'.46''$	$c = 45°.9'.46''$, et corrigez les calculs où cette quantité entre.

TABLES.

TABLE I.

PREMIÈRE PARTIE.

Pour trouver l'excès sphérique exprimé en secondes centésimales.

Argumens. *Base et hauteur des triangles.*

BASE.	HAUTEUR.									
	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
1000	0"007	0"015	0"023	0"031	0"039	0"047	0"054	0"062	0"070	0"078
2000	0,015	0,031	0,047	0,062	0,078	0,094	0,109	0,125	0,141	0,157
3000	0,023	0,047	0,070	0,094	0,117	0,141	0,164	0,188	0,212	0,235
4000	0,031	0,062	0,094	0,125	0,157	0,188	0,219	0,251	0,282	0,314
5000	0,039	0,078	0,117	0,157	0,196	0,235	0,274	0,314	0,353	0,392
6000	0,047	0,094	0,141	0,188	0,235	0,282	0,329	0,376	0,423	0,471
7000	0,054	0,109	0,164	0,219	0,274	0,329	0,383	0,437	0,491	0,545
8000	0,062	0,125	0,188	0,251	0,314	0,376	0,438	0,500	0,562	0,624
9000	0,070	0,141	0,212	0,282	0,353	0,423	0,493	0,563	0,633	0,700
10000	0,078	0,157	0,235	0,314	0,392	0,471	0,549	0,628	0,706	0,785
11000	0,086	0,173	0,259	0,345	0,431	0,518	0,604	0,691	0,777	0,863
12000	0,094	0,188	0,282	0,376	0,471	0,565	0,659	0,753	0,848	0,942
13000	0,102	0,204	0,306	0,408	0,510	0,612	0,714	0,816	0,918	1,020
14000	0,109	0,219	0,329	0,439	0,549	0,659	0,769	0,879	0,989	1,099
15000	0,117	0,235	0,353	0,471	0,589	0,706	0,824	0,942	1,060	1,178
16000	0,125	0,251	0,376	0,502	0,627	0,753	0,878	1,004	1,130	1,256
17000	0,133	0,267	0,400	0,534	0,667	0,801	0,934	1,068	1,201	1,335
18000	0,141	0,282	0,424	0,565	0,707	0,848	0,989	1,131	1,272	1,414
19000	0,149	0,298	0,447	0,596	0,746	0,895	1,044	1,193	1,342	1,492
20000	0,157	0,314	0,471	0,628	0,785	0,942	1,099	1,256	1,413	1,570
21000	0,164	0,329	0,494	0,659	0,824	0,989	1,154	1,319	1,484	1,649
22000	0,172	0,345	0,518	0,691	0,863	1,036	1,209	1,382	1,554	1,727
23000	0,180	0,361	0,541	0,722	0,903	1,083	1,264	1,444	1,625	1,806
24000	0,188	0,376	0,565	0,753	0,942	1,130	1,319	1,507	1,696	1,884
25000	0,196	0,392	0,588	0,785	0,981	1,177	1,374	1,570	1,766	1,963
26000	0,204	0,408	0,612	0,816	1,020	1,224	1,429	1,633	1,838	2,042
27000	0,212	0,424	0,636	0,848	1,060	1,272	1,484	1,696	1,908	2,120
28000	0,220	0,439	0,659	0,879	1,099	1,319	1,539	1,759	1,979	2,199
29000	0,227	0,455	0,683	0,911	1,138	1,366	1,594	1,821	2,049	2,277
30000	0,235	0,471	0,706	0,942	1,178	1,413	1,649	1,884	2,120	2,356
31000	0,243	0,486	0,730	0,973	1,217	1,460	1,704	1,947	2,191	2,434
32000	0,251	0,502	0,753	1,005	1,256	1,507	1,759	2,010	2,261	2,513
33000	0,259	0,518	0,777	1,036	1,295	1,555	1,814	2,073	2,332	2,591
34000	0,267	0,534	0,801	1,068	1,335	1,602	1,869	2,136	2,403	2,670
35000	0,274	0,549	0,824	1,099	1,374	1,649	1,924	2,199	2,474	2,749
36000	0,282	0,565	0,848	1,130	1,413	1,696	1,979	2,261	2,544	2,827
37000	0,290	0,581	0,871	1,162	1,452	1,743	2,033	2,324	2,615	2,905
38000	0,298	0,596	0,895	1,193	1,492	1,790	2,088	2,387	2,685	2,984
39000	0,306	0,612	0,918	1,225	1,531	1,837	2,144	2,450	2,756	3,063
40000	0,314	0,628	0,942	1,256	1,570	1,884	2,199	2,513	2,827	3,141
41000	0,322	0,644	0,966	1,288	1,610	1,932	2,254	2,576	2,898	3,220
42000	0,329	0,659	0,989	1,319	1,649	1,979	2,309	2,639	2,968	3,298
43000	0,337	0,675	1,013	1,350	1,688	2,026	2,364	2,701	3,039	3,377
44000	0,345	0,691	1,036	1,382	1,727	2,073	2,419	2,764	3,110	3,455
45000	0,353	0,707	1,060	1,413	1,767	2,120	2,474	2,827	3,180	3,534
46000	0,361	0,722	1,083	1,445	1,806	2,167	2,528	2,890	3,251	3,612
47000	0,369	0,738	1,107	1,476	1,845	2,214	2,583	2,952	3,322	3,691
48000	0,377	0,753	1,130	1,507	1,884	2,261	2,638	3,015	3,392	3,769
49000	0,384	0,769	1,154	1,539	1,924	2,309	2,693	3,078	3,463	3,848
50000	0,392	0,785	1,178	1,570	1,963	2,356	2,748	3,141	3,534	3,927

TABLE I.

DEUXIÈME PARTIE.

Pour trouver l'excès sphérique de la somme de trois Angles sur 200 Grades.

Argumens. *Côté et angle adjacent.*

G.	G.	7000	8000	9000	10000	11000	12000	13000	14000	15000
0	100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	99	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,03
2	98	0,01	0,02	0,02	0,02	0,03	0,04	0,04	0,05	0,06
3	97	0,02	0,02	0,03	0,04	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
4	66	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,11
5	95	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,09	0,10	0,12	0,14
6	94	0,04	0,05	0,06	0,07	0,09	0,10	0,12	0,14	0,17
7	93	0,04	0,05	0,07	0,09	0,10	0,12	0,14	0,17	0,19
8	92	0,05	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0'17	0,19	0,22
9	91	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13	0,16	0,19	0,21	0,25
10	90	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15	0,17	0,21	0,24	0,27
11	89	0,06	0,08	0,11	0,13	0,16	0,19	0,22	0,26	0,30
12	88	0,07	0,09	0,12	0,14	0,17	0,21	0,24	0,28	0,33
13	87	0,08	0,10	0,13	0,16	0,19	0,22	0,26	0,31	0,35
14	86	0,08	0,11	0,13	0,17	0,20	0,24	0,28	0,33	0,38
15	85	0,09	0,11	0,14	0,18	0,22	0,26	0,30	0,35	0,40
16	84	0,09	0,12	0,15	0,19	0,23	0,27	0,32	0,37	0,43
17	83	0,10	0,13	0,16	0,20	0,24	0,29	0,34	0,39	0,45
18	82	0,10	0,13	0,17	0,21	0,25	0,30	0,36	0,41	0,47
19	81	0,11	0,14	0,18	0,22	0,27	0,32	0,37	0,43	0,50
20	80	0,11	0,15	0,19	0,23	0,28	0,33	0,39	0,45	0,52
21	79	0,12	0,15	0,19	0,24	0,29	0,35	0,41	0,47	0,54
22	78	0,12	0,16	0,20	0,25	0,30	0,36	0,43	0,49	0,56
23	77	0,13	0,17	0,21	0,26	0,32	0,38	0,45	0,52	0,58
24	76	0,13	0,17	0,22	0,27	0,33	0,39	0,46	0,53	0,60
25	75	0,14	0,18	0,22	0,28	0,34	0,40	0,47	0,54	0,62
26	74	0,14	0,18	0,23	0,29	0,35	0,41	0,48	0,56	0,64
27	73	0,14	0,19	0,24	0,29	0,36	0,42	0,50	0,58	0,66
28	72	0,15	0,19	0,24	0,30	0,37	0,44	0,51	0,59	0,68
29	71	0,15	0,20	0,25	0,31	0,38	0,45	0,52	0,61	0,70
30	70	0,16	0,20	0,26	0,32	0,38	0,46	0,54	0,62	0,71
31	69	0,16	0,21	0,26	0,32	0,39	0,47	0,55	0,64	0,73
32	68	0,16	0,21	0,27	0,33	0,40	0,48	0,56	0,65	0,75
33	67	0,17	0,22	0,27	0,34	0,41	0,49	0,57	0,66	0,76
34	66	0,17	0,22	0,28	0,34	0,42	0,50	0,58	0,67	0,77
35	65	0,17	0,22	0,28	0,32	0,42	0,50	0,59	0,69	0,79
36	64	0,17	0,23	0,29	0,36	0,43	0,51	0,60	0,70	0,80
37	63	0,18	0,23	0,29	0,36	0,44	0,52	0,61	0,71	0,81
38	62	0,18	0,23	0,30	0,36	0,44	0,53	0,62	0,72	0,82
39	61	0,18	0,24	0,30	0,37	0,45	0,53	0,62	0,72	0,83
40	60	0,18	0,24	0,30	0,37	0,45	0,54	0,63	0,73	0,84
41	59	0,18	0,24	0,30	0,38	0,46	0,54	0,63	0,74	0,85
42	58	0,19	0,24	0,31	0,38	0,46	0,55	0,64	0,75	0,86
43	57	0,19	0,25	0,31	0,38	0,46	0,55	0,65	0,75	0,86
44	56	0,19	0,25	0,31	0,39	0,47	0,56	0,65	0,76	0,87
45	55	0,19	0,25	0,31	0,39	0,47	0,56	0,66	0,76	0,87
46	54	0,19	0,25	0,32	0,39	0,47	0,56	0,66	0,76	0,88
47	53	0,19	0,25	0,32	0,39	0,47	0,56	0,66	0,77	0,88
48	52	0,19	0,25	0,32	0,39	0,47	0,56	0,66	0,77	0,88
49	51	0,19	0,25	0,32	0,39	0,47	0,57	0,66	0,77	0,88
50	50	0,19	0,25	0,32	0,39	0,48	0,57	0,66	0,77	0,88

SUITE DE LA TABLE I.

DEUXIÈME PARTIE.

Pour trouver l'excès sphérique de la somme de trois Angles sur 200 Grades.

Argumens. *Côté et angle adjacent.*

G.	G.	16000	17000	18000	19000	20000	21000	22000	23000	24000
0	100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	99	0,03	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,06	0,07	0,07
2	98	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,10	0,12	0,13	0,14
3	97	0,09	0,11	0,12	0,13	0,15	0,16	0,18	0,20	0,21
4	96	0,13	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28
5	95	0,16	0,18	0,20	0,22	0,25	0,27	0,30	0,32	0,35
6	94	0,19	0,21	0,24	0,27	0,29	0,32	0,36	0,39	0,42
7	93	0,22	0,25	0,28	0,31	0,34	0,38	0,41	0,45	0,49
8	92	0,25	0,28	0,32	0,35	0,39	0,43	0,47	0,52	0,56
9	91	0,28	0,32	0,35	0,40	0,44	0,48	0,53	0,58	0,63
10	90	0,31	0,35	0,39	0,44	0,49	0,54	0,59	0,64	0,70
11	89	0,34	0,38	0,43	0,48	0,53	0,59	0,64	0,70	0,77
12	88	0,37	0,42	0,47	0,52	0,58	0,64	0,70	0,76	0,83
13	87	0,40	0,45	0,51	0,56	0,62	0,69	0,75	0,83	0,89
14	86	0,43	0,48	0,54	0,60	0,67	0,74	0,81	0,88	0,96
15	85	0,46	0,52	0,58	0,64	0,71	0,79	0,86	0,94	1,03
16	84	0,48	0,55	0,61	0,68	0,76	0,83	0,91	1,00	1,09
17	83	0,51	0,58	0,65	0,72	0,80	0,88	0,97	1,06	1,15
18	82	0,54	0,61	0,68	0,76	0,84	0,93	1,02	1,11	1,21
19	81	0,57	0,64	0,72	0,80	0,88	0,97	1,07	1,17	1,27
20	80	0,59	0,67	0,75	0,83	0,92	1,02	1,12	1,22	1,33
21	79	0,62	0,70	0,78	0,87	0,96	1,06	1,17	1,27	1,39
22	78	0,64	0,72	0,81	0,90	1,00	1,10	1,21	1,32	1,44
23	77	0,66	0,75	0,84	0,93	1,04	1,15	1,26	1,37	1,50
24	76	0,69	0,78	0,87	0,97	1,07	1,19	1,30	1,42	1,55
25	75	0,71	0,80	0,90	1,00	1,11	1,22	1,34	1,47	1,60
26	74	0,73	0,83	0,93	1,03	1,14	1,26	1,39	1,51	1,65
27	73	0,75	0,85	0,95	1,06	1,17	1,30	1,43	1,56	1,69
28	72	0,77	0,87	0,98	1,09	1,20	1,33	1,46	1,60	1,74
29	71	0,79	0,90	1,01	1,12	1,24	1,37	1,50	1,64	1,79
30	70	0,81	0,92	1,03	1,15	1,27	1,40	1,54	1,68	1,83
31	69	0,83	0,94	1,05	1,17	1,30	1,43	1,57	1,72	1,87
32	68	0,85	0,96	1,07	1,20	1,33	1,46	1,60	1,75	1,91
33	67	0,87	0,98	1,09	1,22	1,35	1,49	1,64	1,79	1,95
34	66	0,88	1,00	1,11	1,24	1,38	1,52	1,67	1,82	1,98
35	65	0,90	1,01	1,13	1,26	1,40	1,54	1,70	1,85	2,02
36	64	0,91	1,03	1,15	1,28	1,42	1,57	1,72	1,88	2,05
37	63	0,92	1,04	1,17	1,30	1,44	1,59	1,74	1,91	2,08
38	62	0,93	1,06	1,18	1,32	1,46	1,61	1,77	1,93	2,10
39	61	0,95	1,07	1,20	1,33	1,48	1,63	1,79	1,96	2,13
40	60	0,96	1,08	1,21	1,35	1,49	1,65	1,81	1,98	2,15
41	59	0,96	1,09	1,22	1,36	1,51	1,66	1,83	2,00	2,17
42	58	0,97	1,10	1,23	1,37	1,52	1,68	1,84	2,01	2,19
43	57	0,98	1,11	1,24	1,38	1,53	1,69	1,86	2,03	2,21
44	56	0,99	1,11	1,25	1,39	1,54	1,70	1,87	2,04	2,22
45	55	0,99	1,12	1,26	1,40	1,55	1,71	1,88	2,05	2,23
46	54	1,00	1,13	1,26	1,41	1,56	1,72	1,89	2,06	2,24
47	53	1,00	1,13	1,27	1,41	1,56	1,72	1,89	2,07	2,25
48	52	1,00	1,13	1,27	1,41	1,57	1,73	1,90	2,07	2,26
49	51	1,00	1,13	1,27	1,42	1,57	1,73	1,90	2,08	2,26
50	50	1,01	1,13	1,27	1,42	1,57	1,73	1,90	2,08	2,26

SUITE DE LA TABLE I.

DEUXIÈME PARTIE.

Pour trouver l'excès sphérique de la somme de trois Angles sur 200 Grades.

Argumens. *Côté et angle adjacent.*

G.	G.	25000	26000	27000	28000	29000	30000	31000	32000	33000
0	100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	99	0,08	0,08	0,09	0,10	0,10	0,11	0,12	0,13	0,13
2	94	0,15	0,17	0,18	0,19	0,21	0,22	0,24	0,25	0,26
3	97	0,23	0,25	0,27	0,29	0,31	0,33	0,36	0,38	0,40
4	96	0,31	0,33	0,36	0,39	0,41	0,44	0,47	0,50	0,54
5	95	0,38	0,42	0,45	0,48	0,52	0,55	0,59	0,63	0,67
6	94	0,46	0,50	0,54	0,58	0,62	0,66	0,71	0,76	0,80
7	93	0,54	0,58	0,62	0,67	0,72	0,77	0,82	0,88	0,93
8	92	0,61	0,66	0,71	0,77	0,82	0,88	0,94	1,00	1,06
9	91	0,68	0,74	0,80	0,86	0,92	0,99	1,05	1,12	1,19
10	90	0,76	0,82	0,88	0,95	1,02	1,09	1,17	1,24	1,32
11	89	0,83	0,90	0,97	1,04	1,12	1,20	1,28	1,36	1,45
12	88	0,90	0,98	1,05	1,13	1,22	1,30	1,39	1,48	1,57
13	87	0,97	1,05	1,14	1,22	1,31	1,40	1,50	1,60	1,70
14	86	1,04	1,13	1,22	1,31	1,41	1,50	1,61	1,71	1,82
15	85	1,11	1,21	1,30	1,40	1,50	1,60	1,71	1,83	1,94
16	84	1,18	1,28	1,38	1,48	1,59	1,70	1,82	1,94	2,06
17	83	1,25	1,35	1,46	1,57	1,68	1,80	1,92	2,05	2,17
18	82	1,32	1,42	1,53	1,65	1,77	1,89	2,02	2,15	2,29
19	81	1,38	1,49	1,61	1,73	1,86	1,99	2,12	2,26	2,40
20	80	1,44	1,56	1,68	1,81	1,94	2,08	2,22	2,36	2,51
21	79	1,50	1,63	1,75	1,89	2,02	2,17	2,31	2,46	2,62
22	78	1,56	1,69	1,82	1,97	2,10	2,25	2,41	2,56	2,73
23	77	1,62	1,76	1,89	2,04	2,18	2,34	2,50	2,66	2,83
24	76	1,68	1,82	1,96	2,11	2,26	2,43	2,58	2,75	2,93
25	75	1,73	1,88	2,02	2,18	2,34	2,50	2,67	2,84	3,02
26	74	1,79	1,93	2,08	2,24	2,41	2,58	2,75	2,93	3,12
27	73	1,84	1,99	2,15	2,31	2,48	2,65	2,83	3,02	3,21
28	72	1,89	2,05	2,21	2,37	2,55	2,72	2,91	3,10	3,30
29	71	1,94	2,10	2,26	2,43	2,61	2,79	2,98	3,18	3,38
30	70	1,99	2,15	2,32	2,49	2,67	2,86	3,05	3,25	3,46
31	69	2,03	2,20	2,37	2,55	2,73	2,92	3,12	3,38	3,54
32	68	2,07	2,24	2,42	2,60	2,79	2,98	3,19	3,40	3,61
33	67	2,11	2,28	2,46	2,65	2,84	3,04	3,25	3,46	3,68
34	66	2,15	2,33	2,51	2,70	2,89	3,10	3,31	3,52	3,75
35	65	2,18	2,37	2,55	2,74	2,94	3,15	3,36	3,58	3,81
36	64	2,22	2,40	2,59	2,79	2,99	3,20	3,41	3,64	3,87
37	63	2,25	2,44	2,63	2,83	3,03	3,24	3,46	3,69	3,93
38	62	2,28	2,47	2,66	2,86	3,07	3,29	3,51	3,74	3,98
39	61	2,31	2,50	2,69	2,90	3,11	3,33	3,55	3,78	4,02
40	60	2,33	2,52	2,72	2,93	3,14	3,36	3,59	3,82	4,07
41	59	2,36	2,55	2,75	2,96	3,17	3,39	3,62	3,86	4,11
42	58	2,38	2,57	2,77	2,98	3,20	3,42	3,65	3,89	4,14
43	57	2,39	2,59	2,79	3,00	3,22	3,45	3,68	3,92	4,17
44	56	2,41	2,61	2,81	3,02	3,24	3,47	3,71	3,95	4,20
45	55	2,42	2,62	2,83	3,04	3,26	3,49	3,73	3,97	4,22
46	54	2,43	2,63	2,84	3,05	3,28	3,51	3,74	3,99	4,24
47	53	2,44	2,64	2,85	3,06	3,29	3,52	3,76	4,00	4,26
48	52	2,45	2,65	2,86	3,07	3,30	3,53	3,77	4,01	4,27
49	51	2,45	2,65	2,86	3,07	3,30	3,53	3,77	4,02	4,27
50	50	2,45	2,65	2,86	3,07	3,30	3,53	3,77	4,02	4,28

SUITE DE LA TABLE I.

DEUXIÈME PARTIE.

Pour trouver l'excès sphérique de la somme de trois Angles sur 200 Grades.

Argumens. *Côté et angle adjacent.*

G.	G.	52000	53000	54000	55000	56000	57000	58000	59000	60000
0	100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	99	0,34	0,34	0,36	0,37	0,39	0,40	0,42	0,43	0,44
2	98	0,67	0,69	0,72	0,75	0,77	0,80	0,83	0,88	0,89
3	97	1,00	1,04	1,08	1,12	1,16	1,20	1,24	1,29	1,33
4	96	1,33	1,35	1,44	1,49	1,54	1,60	1,66	1,71	1,77
5	95	1,66	1,73	1,79	1,86	1,93	2,00	2,07	2,14	2,21
6	94	1,99	2,07	2,15	2,23	2,31	2,39	2,48	2,56	2,65
7	93	2,32	2,41	2,50	2,59	2,69	2,78	2,88	2,98	3,08
8	92	2,64	2,74	2,85	2,95	3,06	3,17	3,28	3,40	3,52
9	91	2,96	3,08	3,19	3,31	3,44	3,56	3,69	3,81	3,94
10	90	3,28	3,41	3,54	3,67	3,81	3,94	4,08	4,22	4,37
11	89	3,60	3,74	3,88	4,02	4,17	4,32	4,47	4,63	4,79
12	88	3,91	4,06	4,22	4,37	4,53	4,70	4,86	5,03	5,20
13	87	4,22	4,38	4,55	4,72	4,89	5,07	5,25	5,43	5,61
14	86	4,52	4,70	4,88	5,06	5,22	5,43	5,62	5,82	6,02
15	85	4,82	5,01	5,20	5,39	5,59	5,79	6,00	6,21	6,42
16	84	5,12	5,31	1,52	5,72	5,93	6,15	6,36	6,59	6,81
17	83	5,41	5,61	5,83	6,05	6,27	6,50	6,72	6,96	7,20
18	82	5,69	5,91	6,14	3,36	6,60	6,84	7,08	7,33	7,58
19	81	5,97	6,19	6,44	6,68	6,92	7,17	7,42	7,68	7,95
20	80	6,24	6,48	6,73	6,98	7,24	7,50	7,76	8,04	8,31
21	79	6,51	6,61	7,02	7,28	7,55	7,82	8,10	8,38	8,66
22	78	6,77	6,87	7,30	7,57	7,85	8,13	8,42	8,71	9,01
23	77	7,02	7,29	7,57	7,86	8,14	8,44	8,74	9,04	9,35
24	76	7,27	7,55	7,84	8,13	8,43	8,73	9,04	9,36	9,68
25	75	7,51	7,80	8,10	8,40	8,71	9,02	9,34	9,67	10,00
26	74	7,74	8,04	8,35	8,66	8,98	9,30	9,63	9,96	10,31
27	73	7,97	8,27	8,59	8,91	9,24	9,57	9,91	10,25	10,60
28	72	8,18	8,50	8,82	9,15	9,49	9,83	10,18	10,53	10,89
29	71	8,39	8,72	9,05	9,37	9,73	10,08	10,44	10,80	11,17
30	70	8,59	8,92	9,26	9,61	9,96	10,32	10,69	11,06	11,44
31	69	8,78	9,12	9,47	9,82	10,19	20,55	10,93	11,31	11,69
32	68	8,97	9,31	9,67	10,03	10,40	10,77	11,15	11,54	11,94
33	67	9,14	9,50	9,86	10,22	10,60	10,98	11,37	11,77	12,17
34	66	9,31	9,67	10,03	10,41	10,79	11,18	11,57	11,98	12,39
35	65	9,46	9,83	10,20	10,58	10,97	11,37	11,77	12,18	12,59
36	64	9,61	9,98	10,36	10,75	11,12	11,54	11,95	12,37	12,78
37	63	9,75	10,12	10,51	10,90	11,30	11,71	12,12	12,55	12,98
38	62	9,87	10,26	10,65	11,04	11,45	11,86	12,28	12,71	13,14
39	61	10,00	10,38	10,77	11,18	11,59	12,00	12,43	12,86	13,30
40	60	10,10	10,49	10,89	11,30	11,71	12,13	12,56	13,00	13,44
41	59	10,20	10,59	11,00	11,41	11,83	12,25	12,68	13,13	13,58
42	58	10,28	10,68	11,10	11,51	11,93	12,36	12,79	13,24	13,69
43	57	10,36	10,77	11,18	11,59	12,02	12,45	12,89	13,34	13,80
44	56	10,43	10,84	11,25	11,67	12,10	12,53	12,97	13,43	13,88
45	55	10,48	10,89	11,31	11,71	12,16	12,60	13,05	13,50	13,96
46	54	10,53	10,94	11,36	11,79	12,22	12,66	13,11	13,56	14,03
47	53	10,57	10,98	11,40	11,83	12,26	12,70	13,15	13,61	14,08
48	52	10,59	11,01	11,43	11,85	12,29	12,73	13,18	13,65	14,12
49	51	10,61	11,03	11,45	11,87	12,31	12,75	13,20	13,66	14,13
50	50	10,62	11,03	11,45	11,88	12,31	12,76	13,21	13,67	14,14

TABLE II.

Pour la réduction des Angles au plan des Cordes.

Argument. $(P + P')$ et $(P - P')$.

Somme ou différence des distances en mètres des deux signaux observés.

Nota. La réduction est évaluée en secondes centésimales.

$(P \pm P')$ en Mètres.	—	$(P \pm P')$ en mètres.	—	$(P \pm P')$ en mètres.	—	$(P \pm P')$ en mètres.	—	$(P \pm P')$ en mètres.	—
0000	0,000	40000	0,025	80000	0,099	120000	0,222	160000	0,395
1000	0,000	41000	0,026	81000	0,101	121000	0,226	161000	0,400
2000	0,000	42000	0,027	82000	0,104	122000	0,229	162000	0,405
3000	0,000	43000	0,028	83000	0,106	123000	0,233	163000	0,410
4000	0,000	44000	0,030	84000	0,109	124000	0,237	164000	0,415
5000	0,000	45000	0,031	85000	0,111	125000	0,241	165000	0,420
6000	0,001	46000	0,033	86000	0,114	126000	0,245	166000	0,425
7000	0,001	47000	0,034	87000	0,117	127000	0,249	167000	0,430
8000	0,001	48000	0,035	88000	0,119	128000	0,253	168000	0,435
9000	0,001	49000	0,037	89000	0,122	129000	0,257	169000	0,440
10000	0,001	50000	0,038	90000	0,125	130000	0,261	170000	0,446
11000	0,002	51000	0,040	91000	0,128	131000	0,265	171000	0,451
12000	0,002	52000	0,042	92000	0,131	132000	0,269	172000	0,456
13000	0,003	53000	0,043	93000	0,133	133000	0,273	173000	0,462
14000	0,003	54000	0,045	94000	0,136	134000	0,277	174000	0,467
15000	0,003	55000	0,046	95000	0,139	135000	0,281	175000	0,472
16000	0,004	56000	0,048	96000	0,142	136000	0,285	176000	0,478
17000	0,004	57000	0,050	97000	0,145	137000	0,289	177000	0,483
18000	0,005	58000	0,052	98000	0,148	138000	0,294	178000	0,489
19000	0,005	59000	0,054	99000	0,151	139000	0,298	179000	0,494
20000	0,006	60000	0,056	100000	0,154	140000	0,302	180000	0,500
21000	0,007	61000	0,057	101000	0,157	141000	0,307	181000	0,505
22000	0,007	62000	0,059	102000	0,160	142000	0,311	182000	0,511
23000	0,008	63000	0,061	103000	0,164	143000	0,315	183000	0,516
24000	0,009	64000	0,063	104000	0,167	144000	0,320	184000	0,522
25000	0,009	65000	0,065	105000	0,170	145000	0,324	185000	0,528
26000	0,010	66000	0,067	106000	0,173	146000	0,329	186000	0,534
27000	0,011	67000	0,069	107000	0,177	147000	0,333	187000	0,539
28000	0,012	68000	0,071	108000	0,180	148000	0,338	188000	0,545
29000	0,013	69000	0,073	109000	0,184	149000	0,342	189000	0,551
30000	0,014	70000	0,076	110000	0,187	150000	0,347	190000	0,557
31000	0,015	71000	0,078	111000	0,190	151000	0,352	191000	0,563
32000	0,016	72000	0,080	112000	0,193	152000	0,356	192000	0,569
33000	0,017	73000	0,082	113000	0,197	153000	0,361	193000	0,574
34000	0,018	74000	0,084	114000	0,200	154000	0,366	194000	0,580
35000	0,019	75000	0,087	115000	0,204	155000	0,370	195000	0,586
36000	0,020	76000	0,089	116000	0,207	156000	0,375	196000	0,592
37000	0,021	77000	0,091	117000	0,211	157000	0,380	197000	0,598
38000	0,022	78000	0,094	118000	0,215	158000	0,385	198000	0,605
39000	0,023	79000	0,096	119000	0,218	159000	0,390	199000	0,611
40000	0,025	80000	0,099	120000	0,222	160000	0,395	200000	0,617

TABLE III.

PREMIÈRE PARTIE.

Des Grades de Longitude, en supposant la terre sphérique.

LATITUDE en GRADES.	GRADES de LONGITUDE.	LATITUDE en GRADES.	GRADES de LONGITUDE.	LATITUDE en GRADES.	GRADES de LONGITUDE.
gr	kilom	gr	kilom	gr	kilom
0	100,000	34	86,074	68	48,175
1	99,988	35	85,264	69	46,793
2	99,951	36	84,433	70	45,399
3	99,889	37	83,581	71	43,994
4	99,803	38	82,708	72	42,578
5	99,692	39	81,815	73	41,151
6	99,556	40	80,902	74	39,715
7	99,396	41	79,968	75	38,268
8	99,211	42	79,015	76	36,812
9	99,002	43	78,043	77	35,347
10	98,769	44	77,051	78	33,874
11	98,511	45	76,040	79	32,392
12	98,229	46	75,011	80	30,902
13	97,922	47	73,963	81	29,404
14	97,592	48	72,897	82	27,899
15	97,237	49	71,813	83	26,387
16	96,858	50	70,711	84	24,869
17	96,456	51	69,591	85	23,344
18	96,029	52	68,455	86	21,814
19	95,579	53	67,301	87	20,279
20	95,106	54	66,131	88	18,738
21	94,608	55	64,945	89	17,193
22	94,088	56	63,742	90	15,643
23	93,544	57	62,524	91	14,090
24	92,978	58	61,291	92	12,533
25	92,388	59	60,042	93	10,973
26	91,775	60	58,778	94	9,411
27	91,140	61	57,500	95	7,847
28	90,483	62	56,208	96	6,279
29	89,803	63	54,902	97	4,711
30	89,101	64	53,583	98	3,141
31	88,377	65	52,250	99	1,571
32	87,631	66	50,904	100	0,000
33	86,863	67	49,546		

TABLE III.

DEUXIÈME PARTIE.

Des Grades de Latitude terrestre dans le Sphéroïde, en supposant l'aplatissement de $\frac{1}{335}$.

Latit.	GRADES de LATITUDE.	Différ.	Latit.	GRADES de LATITUDE.	Différ.	Latit.	GRADES de LATITUDE.	Différ.	Latit.	GRADES de LATITUDE.	Différ.
G.	Mètres.	M.	G.	Mètres.	M.	G.	Mètres.	M.	G.	Mètres.	M.
0	99552,5		25	99687,9		50	100006,2		75	100322,0	
		0,4			10,2			14,1			9,7
1	99552,9	0,9	26	99698,1	10,5	51	100020,3	14,1	76	100331,7	9,4
2	99553,8	1,3	27	99708,6	10,8	52	100034,4	14,0	77	100341,1	9,0
3	99555,1	1,8	28	99719,4	11,1	53	100048,4	14,0	78	100350,1	8,7
4	99556,9	2,1	29	99730,5	11,4	54	100062,4	13,9	79	100358,8	8,4
5	99559,0		30	99741,9		55	100076,3		80	100367,2	
		2,8			11,6			13,9			7,9
6	99561,8	3,0	31	99753,5	11,8	56	100090,2	13,7	81	100375,1	7,6
7	99564,7	3,5	32	99765,3	12,1	57	100103,9	13,7	82	100382,7	7,2
8	99568,2	3,9	33	99777,4	12,3	58	100117,6	13,6	83	100389,9	6,9
9	99572,1	4,3	34	99789,7	12,5	59	100131,2	13,4	84	100396,8	6,4
10	99576,4		35	99802,2		60	100144,6		85	100403,2	
		4,8			12,7			13,3			6,1
11	99581,2	5,1	36	99814,9	12,9	61	100157,9	13,1	86	100409,3	5,6
12	99586,3	5,6	37	99827,8	13,1	62	100171,0	13,0	87	100414,9	5,2
13	99591,8	5,9	38	99840,9	13,2	63	100184,0	12,8	88	100420,1	4,8
14	99597,8	6,4	39	99854,1	13,4	64	100196,8	12,6	89	100424,9	4,4
15	99604,2		40	99867,5		65	100209,4		90	100429,3	
		6,7			13,5			12,3			3,9
16	99610,9	7,1	41	99881,0	13,6	66	100221,7	12,2	91	100433,2	3,6
17	99618,0	7,4	42	99894,6	13,7	67	100233,9	12,0	92	100436,8	3,1
18	99625,4	8,0	43	99908,3	13,8	68	100245,9	11,7	93	100439,9	2,6
19	99633,4	8,2	44	99922,1	13,9	69	100257,5	11,5	94	100442,5	2,2
20	99641,6		45	99936,0		70	100269,0		95	100444,7	
		8,6			13,9			11,2			1,8
21	99650,2	8,9	46	99950,0	14,0	71	100280,2	10,9	96	100446,5	1,3
22	99659,1	9,3	47	99964,0	14,0	72	100291,1	10,6	97	100447,8	0,9
23	99668,4	9,6	48	99978,0	14,1	73	100301,7	10,3	98	100448,7	0,5
24	99678,0	9,9	49	99992,1	14,1	74	100312,0	10,0	99	100449,2	
25	99687,9		50	100006,2		75	100322,0		100		

TABLE III.

DEUXIÈME PARTIE.

Des Grades de Longitude terrestre dans le Sphéroïde, en supposant l'aplatissement de $\frac{1}{335}$.

Latit.	GRADES de LONGITUDE.	Différence.	Latit.	GRADES de LONGITUDE.	Différence.	Latit.	GRADES de LONGITUDE.	Différence.	Latit.	GRADES de LONGITUDE.	Différence.
G.	Mètres.	M.	G.	Mètres.	M.	G.	Mètres.	M.	G.	Mètres.	M.
0	100149,4		25	92566,4		50	70922,1		75	38423,4	
		12,3			610,6			1119,5			1460,6
1	100137,1		26	91955,8		51	69802,6		76	36962,8	
		36,8			633,2			1136,8			1469,8
2	100100,3		27	91322,6		52	68665,8		77	35493,0	
		61,4			655,7			1153,8			1478,8
3	100038,9		28	90666,9		53	67512,0		78	34014,2	
		85,9			678,0			1170,7			1487,2
4	99953,0		29	89988,9		54	66341,3		79	32527,0	
		110,5			700,3			1187,1			1496,4
5	99842,5		30	89288,6		55	65154,2		80	31031,6	
		134,9			722,2			1203,3			1508,1
6	99707,6		31	88566,4		56	63950,9		81	29528,5	
		159,4			744,0			1219,2			1510,6
7	99548,2		32	87822,4		57	62731,7		82	28017,9	
		183,9			765,7			1234,9			1517,6
8	99364,3		33	87056,7		58	61496,8		83	26500,3	
		208,1			787,2			1250,1			1524,2
9	99156,2		34	86269,5		59	60246,7		84	24976,1	
		232,6			808,5			1265,2			1530,5
10	98923,6		35	85461,0		60	58981,5		85	23445,6	
		256,8			829,6			1279,9			1536,4
11	98666,8		36	84631,4		61	57701,6		86	21909,2	
		281,0			850,5			1294,2			1541,9
12	98385,8		37	83780,9		62	56407,4		87	20367,3	
		305,2			871,2			1308,3			1547,0
13	98080,6		38	82909,7		63	55099,1		88	18820,3	
		329,3			891,6			1322,0			1551,7
14	97751,3		39	82018,1		64	53777,1		89	17268,6	
		353,2			911,9			1335,4			1556,0
15	97398,1		40	81106,2		65	52441,7		90	15712,6	
		377,2			932,1			1348,6			1560,0
16	97020,9		41	80174,1		66	51093,1		91	14152,6	
		401,0			951,8			1361,3			1563,6
17	96616,9		42	79222,3		67	49731,8		92	12589,0	
		424,8			971,4			1373,6			1566,7
18	96192,1		43	78250,9		68	48358,3		93	11022,3	
		448,4			990,8			1385,8			1569,4
19	95746,8		44	77260,1		69	46972,4		94	9452,9	
		471,9			1010,0			1397,6			1571,9
20	95274,9		45	76250,1		70	45574,8		95	7881,0	
		495,3			1028,8			1408,9			1573,8
21	94779,6		46	75221,3		71	44165,9		96	6307,2	
		518,7			1047,5			1419,9			1575,4
22	94260,9		47	74173,8		72	42746,0		97	4731,8	
		541,8			1065,8			1430,7			1576,1
23	93719,1		48	73108,0		73	41315,3		98	3155,7	
		564,9			1084,0			1440,9			1577,8
24	93154,2		49	72024,0		74	39874,4		99	1577,8	
		587,8			1101,9			1451,0			1577,8
25	92566,4		50	70922,1		75	38423,4		100	0,0	

TABLE IV.

Des hauteurs du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, et des abaissemens causés par la réfraction, depuis la distance de 20 mètres jusqu'à 10000.

Distance en mètres.	Élévation du niveau apparent au-dessus du niveau vrai.	Abaissement causé par la réfraction.	Distance en mètres.	Élévation du Niveau apparent au-dessus du Niveau vrai.	Abaissement causé par la réfraction.	Distance en mètres.	Élévation du Niveau apparent au-dessus du Niveau vrai.	Abaissement causé par la réfraction.	Distance en mètres.	Élévation du Niveau apparent au-dessus du Niveau vrai.	Abaissement causé par la réfraction.
mt	*mt*	*mt*	*mt*	*mt*	*mt*	*mt*	*mt*	*mt*	*mt*	*mt*	*mt*
0	0,0000	0,0000	1000	0,0785	0,0126	2000	0,3142	0,0503	7000	3,8484	0,6157
20	0,0000	0,0000	1020	0,0817	0,0131	2100	0,3464	0,0554	7100	3,9592	0,6335
40	0,0001	0,0000	1040	0,0849	0,0136	2200	0,3801	0,0608	7200	4,0715	0,6514
60	0,0003	0,0000	1060	0,0882	0,0141	2300	0,4155	0,0665	7300	4,1854	0,6697
80	0,0005	0,0001	1080	0,0916	0,0147	2400	0,4524	0,0724	7400	4,3008	0,6881
100	0,0008	0,0001	1100	0,0950	0,0152	2500	0,4909	0,0785	7500	4,4179	0,7069
120	0,0011	0,0002	1120	0,0985	0,0158	2600	0,5309	0,0849	7600	4,5365	0,7258
140	0,0015	0,0002	1140	0,1021	0,0163	2700	0,5726	0,0916	7700	4,6566	0,7451
160	0,0020	0,0003	1160	0,1057	0,0169	2800	0,6157	0,0985	7800	4,7784	0,7645
180	0,0025	0,0004	1180	0,1094	0,0175	2900	0,6605	0,1057	7900	4,9017	0,7843
200	0,0031	0,0005	1200	0,1131	0,0181	3000	0,7069	0,1131	8000	5,0265	0,8042
220	0,0038	0,0006	1220	0,1169	0,0187	3100	0,7548	0,1208	8100	5,1530	0,8245
240	0,0045	0,0007	1240	0,1208	0,0193	3200	0,8042	0,1287	8200	5,2810	0,8450
260	0,0053	0,0008	1260	0,1247	0,0199	3300	0,8553	0,1368	8300	5,4106	0,8657
280	0,0062	0,0010	1280	0,1287	0,0206	3400	0,9079	0,1453	8400	5,5418	0,8867
300	0,0071	0,0011	1300	0,1327	0,0212	3500	0,9621	0,1539	8500	5,6745	0,9079
320	0,0080	0,0013	1320	0,1368	0,0219	3600	1,0179	0,1629	8600	5,8088	0,9294
340	0,0091	0,0014	1340	0,1410	0,0226	3700	1,0752	0,1720	8700	5,9447	0,9511
360	0,0102	0,0016	1360	0,1453	0,0232	3800	1,1341	0,1815	8800	6,0821	0,9731
380	0,0113	0,0018	1380	0,1496	0,0239	3900	1,1946	0,1911	8900	6,2211	0,9954
400	0,0126	0,0020	1400	0,1539	0,0246	4000	1,2566	0,2011	9000	6,3617	1,0179
420	0,0138	0,0022	1420	0,1584	0,0253	4100	1,3202	0,2112	9100	6,5039	1,0406
440	0,0152	0,0024	1440	0,1629	0,0261	4200	1,3854	0,2217	9200	6,6476	1,0636
460	0,0166	0,0027	1460	0,1674	0,0268	4300	1,4522	0,2323	9300	6,7929	1,0869
480	0,0181	0,0029	1480	0,1720	0,0275	4400	1,5205	0,2433	9400	6,9398	1,1104
500	0,0196	0,0031	1500	0,1767	0,0283	4500	1,5904	0,2545	9500	7,0882	1,1341
520	0,0212	0,0034	1520	0,1815	0,0290	4600	1,6619	0,2659	9600	7,2382	1,1581
540	0,0229	0,0037	1540	0,1863	0,0298	4700	1,7349	0,2776	9700	7,3898	1,1824
560	0,0246	0,0039	1560	0,1911	0,0306	4800	1,8096	0,2895	9800	7,5430	1,2069
580	0,0264	0,0042	1580	0,1961	0,0314	4900	1,8857	0,3017	9900	7,6977	1,2316
600	0,0283	0,0045	1600	0,2011	0,0322	5000	1,9635	0,3142	10000	7,8540	1,2566
620	0,0302	0,0048	1620	0,2061	0,0330	5100	2,0428	0,3268			
640	0,0322	0,0051	1640	0,2112	0,0338	5200	2,1237	0,3398			
660	0,0342	0,0055	1660	0,2164	0,0346	5300	2,2062	0,3530			
680	0,0363	0,0058	1680	0,2217	0,0355	5400	2,2902	0,3664			
700	0,0385	0,0062	1700	0,2270	0,0363	5500	2,3758	0,3801			
720	0,0407	0,0065	1720	0,2323	0,0372	5600	2,4630	0,3941			
740	0,0430	0,0069	1740	0,2378	0,0380	5700	2,5518	0,4083			
760	0,0454	0,0073	1760	0,2433	0,0389	5800	2,6421	0,4227			
780	0,0478	0,0076	1780	0,2488	0,0398	5900	2,7340	0,4374			
800	0,0503	0,0080	1800	0,2545	0,0407	6000	2,8274	0,4524			
820	0,0528	0,0084	1820	0,2602	0,0416	6100	2,9225	0,4676			
840	0,0554	0,0089	1840	0,2659	0,0425	6200	3,0191	0,4830			
860	0,0581	0,0093	1860	0,2717	0,0435	6300	3,1172	0,4988			
880	0,0608	0,0097	1880	0,2776	0,0444	6400	3,2170	0,5147			
900	0,0636	0,0102	1900	0,2835	0,0454	6500	3,3183	0,5309			
920	0,0665	0,0106	1920	0,2895	0,0463	6600	3,4212	0,5474			
940	0,0694	0,0111	1940	0,2956	0,0473	6700	3,5256	0,5641			
960	0,0724	0,0116	1960	0,3017	0,0483	6800	3,6317	0,5811			
980	0,0754	0,0121	1980	0,3079	0,0493	6900	3,7393	0,5983			

Nota. Cette Table est extraite de l'*Essai sur le Nivellement*, par M. Busson-Descars. J'ai donné (76 et 77) les formules à l'aide desquelles ont été calculés les nombres des deuxième et troisième colonnes.

TABLEAU.

TABLEAU des Echelles prises dans le système métrique, et adoptées au *Dépôt général de la Guerre* pour ses travaux topographiques et géographiques, avec la comparaison de celles qui leur étaient analogues dans les anciennes mesures.

NUMÉROS des ÉCHELLES adoptées.	ÉCHELLES DE L'ANCIEN SYSTÈME, en usage POUR LES CARTES ET PLANS DE TOPOGRAPHIE ET DE GÉOGRAPHIE, et les plus analogues aux Échelles du nouveau système.	RAPPORTS de ces Échelles avec les longueurs réelles prises sur le terrain	ÉCHELLES DU NOUVEAU SYSTÈME, adoptées POUR LES CARTES ET PLANS DE TOPOGRAPHIE ET DE GÉOGRAPHIE.	RAPPORTS de ces échelles avec les longueurs réelles prises sur le terrain	RAPPORTS entre les anciennes et les nouvelles échelles	VALEURS DES RAPPORTS CI-CONTRE EXPRIMÉES EXACTEMENT EN ANCIENNES MESURES.	APPLICATION DES NOUVELLES ÉCHELLES AUX DIVERS BESOINS DE LA TOPOGRAPHIE ET DE LA GÉOGRAPHIE.
TOPOGRAPHIE DE DÉTAIL.							
1.	3 pouces..... pour 100 Toises.....	1/2,400	5 centimètres..... pour 100 mètres...	1/2,000		2m,00 pour 100 Toises.....	Levé des plans des places, forts et postes de guerre, des travaux de tranchée, des camps retranchés, de la fortification passagère ou de campagne, des ports de mer, retranchemens et batteries de côtes, des villes, bourgs et villages, des routes, des canaux; le tout avec ou sans les environs.
	12 pouces..... pour 100 T.....	1/600	2 décimètres..... pour 100 mètres...	1/500		0m,80 pour 100 T.....	Levé des profils que peuvent exiger les plans ci-dessus.
2.	1 pouce 6 lignes.... pour 100 T.....	1/4,800	2 centimètres..... pour 100 mètres...	1/5,000		2m,28 pour 100 T.....	*Nota. On a quadruplé l'échelle.* Réduction des plans et profils levés à l'échelle n° 1, tels que places, forts, postes de guerre, travaux de tranchées, etc. etc., pour former des collections et atlas, et pour graver. Le format de la réduction serait de 1 mètre ⅔ de côté, en représentant tous les objets situés à 8,000 mètres du centre de cette réduction.
TOPOGRAPHIE GÉNÉRALE.							
3.	8 lignes..... pour 100 T.....	1/10,800	1 centimètre..... pour 100 mètres...	1/10,000		9m,04 pour 100 T.....	Levé de la topographie complète d'un pays, assujéti à des opérations géodésiques et astronomiques, levé des campemens, marches, routes et itinéraires; plans-reliefs pour l'étude du terrain.
4.	4 lignes..... pour 100 T.....	1/21,600	5 millimètres..... pour 100 mètres...	1/20,000		4m,52 pour 100 T.....	*Levé d'un pays pendant la guerre, c'est-à-dire, des cartes dites Reconnaissances militaires*; levé des plans de combats, actions et batailles; réduction et mise-au-net des cartes et plans à l'échelle n° 3, pour en former des recueils manuables et faciles à consulter. *Nota. Il faut assujétir les reconnaissances militaires à un canevas du pays, préparé d'avance, au moyen de positions déterminées par les longitudes et les latitudes. Ce canevas pourrait être gravé au trait pendant les loisirs de la paix, et distribué à chaque section d'ingénieurs-géographes au moment de la guerre.*
5.	2 lignes..... pour 100 T.....	1/43,200	2 millimètres..... pour 100 mètres...	1/50,000		18m,72 pour 100 T.....	Gravure de la topographie complète, levée à l'échelle n° 3, pour tous les pays autres que la France. On y assujétirait, par la suite, la gravure des cartes de *Cassini*, *Ferraris* et autres, qui doivent compléter le territoire de la France, lorsqu'on en sera arrivé à refaire ces deux premières: on y comprendra également la gravure des plans de combats, actions et batailles, levés à l'échelle n° 4. *Nota. L'échelle de la belle carte de Guyenne et de la superbe carte des Chasses; celle des environs de Paris, par Dom Coutans, sont à-peu-près les mêmes que celle-ci.*
6.	1 ligne..... pour 100 T.....	1/86,400	1 millimètre..... pour 100 mètres...	1/100,000		37m,86 pour 100 T.....	L'ancienne échelle, qui est celle des cartes de *Cassini* et *Ferraris*, servirait jusqu'à l'époque où l'on en fera une nouvelle édition, à la gravure de la topographie pour tout ce qui doit compléter le territoire de la France, comme la carte des quatre départemens réunis, de ceux du Mont-Blanc, des Alpes-Maritimes et de la Corse. *Nota. La nouvelle n'est que provisoirement adoptée pour la semi-topographie.*
CHOROGRAPHIE.							
7.	⅛ de ligne..... pour 100 T..... ou 2 lignes..... pour 1,000 T.....	1/432,000	2 millimètres..... pour 1,000 mètres... ou 2 décimètres..... pour 1 grade.....	1/500,000		215m,27 pour 100 T..... ou 21m,72 pour 1,000 T.....	Réduction de la topographie complète en chorographie, par le dessin et la gravure, pour en former des atlas. Cette chorographie assujétie au développement de *Plantelet*, serait détaillée; on la destinerait à représenter les différentes provinces, gouvernemens, départemens, ou un mot, les diverses divisions administratives d'un Etat. Cette échelle servirait aussi au dessin et à la gravure des cartes d'ensemble des triangles employés au canevas des opérations de la topographie complète.
8.	1/10 de ligne..... pour 100 T..... ou 1 ligne..... pour 1,000 T.....	1/864,000	1 millimètre..... pour 1,000 mètres... ou 1 décimètre..... pour 1 grade.....	1/1,000,000		86m,86 pour 100 T..... ou 86m pour 1,000 T.....	Réduction de la chorographie à l'échelle n° 7, pour le dessin et la gravure de la carte générale d'un Etat, d'une Souveraineté, ou d'une Contrée.
GÉOGRAPHIE.							
9.	5/100 de ligne..... pour 100 T..... ou 1/3 ligne..... pour 1,000 T.....	1/1,728,000	5 décimillimètres..... pour 1,000 mètres... ou 5 centimètres..... pour 1 grade.....	1/2,000,000		345m pour 100 T..... ou 43m pour 1,000 T.....	Dessin et gravure de la géographie, c'est-à-dire, de la carte de chacune des quatre parties du globe.

TABLE VI.

Tableau des teintes conventionnelles, pour les plans-minutes dressés sur le terrain, par M. *Chrestien*, ingénieur en chef aux Relations extérieures.

NOMS DES TEINTES.	NOMS DES COULEURS.	COMPOSITION DES TEINTES (1).	OBSERVATIONS.
Terres labourées, pour les pays entièrement cultivés	.....	.....	L'objet des teintes conventionnelles étant d'abréger le travail des plans-minutes sur le terrain, en indiquant, par leur simple application, les différentes productions et cultures qui s'y rencontrent, l'on est convenu de laisser en blanc tout ce qui est labouré dans les pays entièrement cultivés, et d'indiquer par de petits parallélogrammes ponctués, les pièces de terre ou champs d'une grandeur conforme à l'échelle du plan : on marquera aussi les arbres fruitiers qui s'y trouvent parsemés.
Terres labourées, dans les pays de montagnes.....	Brun-terre-d'ombre, ou terre de sienne non calcinée.....	Trois parties de *gomme-gutte* (pure, et de même des autres couleurs), une partie de *carmin*, un quart de partie d'*encre de la chine*, et 8 parties d'*eau* (aussi pure), pour porter la teinte au ton de celle du tableau.	Dans les pays de montagnes, tels que les Pyrénées, les Alpes, etc., toutes les parties de terrain sur lesquelles il ne se rencontrera pas de productions ou cultures désignées par les teintes, resteront en blanc; et comme les terres labourées ne s'y trouvent qu'en très-petites masses, ou ne sont que de petits champs enclos de haies ou de murs, on est convenu de les indiquer par la teinte ci-contre.
Vignes.....	Brun, rouge ou approchant, terre de sienne calcinée.....	Une partie de *gomme-gutte*, une de *carmin*, un quart de partie d'*encre de la chine*, et 8 à 10 parties d'*eau*.	Quoique cette teinte soit beaucoup plus rouge que la précédente, il pourrait arriver qu'on ne les distinguât pas dans les montagnes, où ces deux teintes se trouvent appliquées l'une contre l'autre sans séparation marquante, et en très-petites superficies. Pour obvier à cet inconvénient, l'on croit qu'il serait nécessaire de couvrir la teinte des vignes de petits échalas noirs, ce qui devient inutile dans les pays entièrement cultivés, où les terres labourées restent, en blanc, et où les autres teintes qui pourraient toucher ou avoisiner celles des vignes, sont absolument différentes.
Prairies.....	Vert-d'herbe...	*Gomme-gutte*, trois parties; *bleu d'indigo*, une partie, et 8 à 10 d'*eau*.	
Vergers.....	Vert-d'herbe léger, ou terre-d'ombre	Le même vert que celui des prairies, réduit à moitié de son ton, ou une partie du vert ci-dessus et 5 à 6 parties d'*eau*. La teinte *terre-d'ombre* est la même que celle pour les terres labourées dans les montagnes.	Dans quelques pays, et surtout dans celui de montagnes, comme, par exemple, dans les Basses-Pyrénées, au pays Basque, beaucoup de vergers sont labourés, alors on mettra sur le fond de ceux-ci, la couleur *terre-d'ombre*, servant à indiquer les terres labourées dans les montagnes; mais pour ceux qui se trouveraient aussi labourés dans les pays entièrement cultivés, leur fond restera en blanc.
Friches.....	Panachée, vert-pistache, et aurore légère....	Même vert que celui des fonds de vergers, auquel on ajoutera un peu de *gomme-gutte*, pour lui donner la couleur pistache. L'aurore légère est composée d'une partie de *gomme-gutte*, $\frac{1}{8}$ de partie de *carmin*, et 10 à 12 d'*eau*.	
Forêts et bois....	Jaune-jonquille.	Une partie de *gom.-gutte* et 7 à 8 d'*eau*	
Broussailles.....	Panachée, jaune-paille et vert-léger.	Le jaune-paille. Une partie de *gom.-gutte*, et 14 à 16 d'*eau*. Le vert léger est le même que celui des fonds de vergers, auquel on ajoutera un peu de bleu.	
Bruyères.....	Panachée; vert et rose.....	Pour la teinte rose, une partie de *carmin*, et 12 parties d'*eau*. La verte est la même que celle des fonds de vergers, à laquelle on ajoutera un peu de bleu.	

(1) Les quatre couleurs principales sont, 1° l'*encre de la chine*, 2° le *carmin*, 3° la *gomme-gutte*, 4° le *bleu d'indigo*. Dans la composition des teintes, on a employé pour base ou mesure, la quantité de couleur que contient un pinceau plein : cette quantité se nommera *partie*.

SUITE DE LA TABLE VI.

Tableau des teintes conventionnelles, pour les plans-minutes dressés sur le terrain.

NOMS DES TEINTES.	NOMS DES COULEURS.	COMPOSITION DES TEINTES.	OBSERVATIONS.
Landes.....	Vert-olive et aurore pâle.....	Teinte vert-olive. Une partie de *gomme-gutte*, une demi-partie de *bleu-d'indigo*, une partie et demie de la teinte rose ci-dessus, et 8 parties d'*eau* : l'aurore pâle, de même que celle pour les friches.	La teinte aurore sert à indiquer les flaques de sable qui se rencontrent dans les Landes, telles qu'on en voit dans celles de Bordeaux : ces flaques sont d'*eau* pendant l'hiver.
Sables.....	Aurore.....	Deux parties de *gomme-gutte*, trois quarts de partie de *carmin*, et seize parties d'*eau*.	Cette teinte étant devenue sèche et dans toute sa force, on la délaiera avec 4 à 5 parties d'*eau*, et on s'en servira pour renforcer les bords des bancs de sables, en l'adoucissant vers le milieu, et pour pointiller ou piquer les sables.
Vase.....	Boue.....	Une partie de *gomme-gutte*, un bon tiers de partie d'*encre de la chine*, un peu de *carmin* et de *bleu* (à la pointe du pinceau seulement), et 20 à 24 parties d'*eau*.	On fera de même pour la vase que pour les sables ; mais on ne pointillera pas.
Terres humides...	Panachée horizontalement, vert et bleu....	Le même vert que celui des prairies, et pour le bleu, une partie d'*indigo*, et 8 à 10 d'*eau*.	
Marais.....	Vert d'herbe et bleu léger.....	Même vert que ci-dessus, le bleu léger, une partie d'*indigo*, et 18 à 20 parties d'*eau*.	Les flaques d'eau après la teinte plate indiquée ci-contre, seront ondulées horizontalement avec du bleu décrit ci-dessus pour les terres humides.
Etangs.....	Bleu léger.....	Comme ci-dessus, une partie d'*indigo*, et 18 à 20 parties d'eau.	Après avoir mis la teinte plate, bleu léger, dans les étangs, les rivières, les fleuves et les lacs, on renforcera les bords, du côté de l'ombre, avec une teinte bleue (d'une partie d'*indigo* et 8 parties d'*eau*), qu'on appliquera le long du bord, d'une largeur convenable à l'étendue de l'objet, et qu'on adoucira vers son milieu. On fera la même chose le long des bords, du côté du jour, avec une teinte à-peu-près moitié plus faible, plus étroite, et également adoucie vers le milieu.
Rivières.....	*Idem*.....	*Idem*.....	Les étangs seront ondulés horizontalement, plus fort du côté de l'ombre, et légèrement du côté du jour.
Fleuves.....	*Idem*.....	*Idem*.....	Les fleuves, les rivières et les lacs seront filés avec du bleu (d'une partie d'*indigo* et 8 parties d'*eau*), le long et parallèlement à leurs bords, en diminuant de force les filets, et en les écartant davantage, à mesure qu'on s'éloignera du bord vers le milieu, pour le côté de l'ombre ; celui du jour sera filé de même avec de la teinte plus légère.
Lacs.....	*Idem*.....	*Idem*.....	
Mers.....	Vert-d'eau léger.	Une partie d'*indigo*, une demi-partie de *gomme-gutte*, et 20 à 24 parties d'*eau*.	Après la teinte plate l'on renforcera aussi les bords, le long de la côte, par une même teinte plus forte (une partie d'*indigo*, une demi-partie de *gomme-gutte*, et 8 à 10 parties d'*eau*), et d'une largeur d'environ un centimètre, en observant de ne pas l'appliquer tout-à-fait près du bord, mais à distance d'un millimètre, et on l'adoucira vers le large. Ensuite, pour imiter les vagues, on fera avec cette même teinte, des sillons courts, tremblés, un peu courbes, et cependant parallèles à la côte, on les diminuant de force, et en les écartant davantage à mesure qu'on s'éloignera de la côte vers le large.

Nota. Toutes les mesures ou parties de couleurs indiquées pour la composition des teintes, ne sont qu'approximatives, et seulement pour aider les personnes qui n'auraient pas l'usage de ces couleurs.

Formules extraites du Mémoire de M. Legendre, *sur les triangles sphéroïdiques.*

Soient, comme dans le n° 7, L, L' les latitudes vraies des points M, M' (fig. 3), λ, λ' leurs latitudes réduites; l la latitude vraie de a, et l' sa latitude réduite; V, V' les angles azimutaux PMa, $PM'a$, et s la ligne géodésique MM'; et soit fait dans les formules (c'), (d'), $x = m + \xi$.

Si l'on suppose que l'angle a soit droit, on aura

$$\sin l' \cos m = \sin \lambda \quad \text{et} \quad \sin l' \sin m = \cos V \cos \lambda,$$

et l'on trouvera, en intégrant par les séries,

$$\frac{s}{b} = \sigma = \xi\left(1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon \sin^2\lambda - \frac{1}{8}\,\varepsilon^2 \sin^4\lambda\right) - \frac{1}{2}\,\xi^2\,\varepsilon \cos V \sin\lambda \cos\lambda,$$

et réciproquement,

$$\xi = \sigma\left(1 - \frac{1}{2}\,\varepsilon \sin^2\lambda + \frac{3}{8}\,\varepsilon^2 \sin^4\lambda\right) + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\varepsilon \cos V \sin\lambda \cos\lambda;$$

par suite et à cause de $\sin\lambda' = \sin l' \cos x$, on obtiendra pour la latitude réduite du point M',

$$\begin{aligned}\lambda' = \lambda &- \sigma \cos V\left(1 - \frac{1}{2}\,\varepsilon \sin^2\lambda + \frac{3}{8}\,\varepsilon^2 \sin^4\lambda\right)\\ &- \frac{1}{2}\,\sigma^2 \sin^2 V \tang\lambda\,(1 - \varepsilon \sin^2\lambda)\\ &- \frac{1}{2}\,\varepsilon\sigma^2 \cos^2 V \sin\lambda \cos\lambda\\ &+ \frac{1}{2}\,\sigma^3 \sin^2 V \cos V\left(\frac{1}{3} + \tang^2\lambda\right);\end{aligned}$$

pour la différence de longitude φ des points M, M',

$$\begin{aligned}\varphi \cos\lambda = &\ \sigma \sin V\left(1 - \frac{1}{2}\,\varepsilon + \frac{7}{8}\,\varepsilon^2\right)\\ &- \sigma^2 \sin V \cos V \tang\lambda\left(1 - \varepsilon + \frac{1}{2}\,\varepsilon \cos^2\lambda\right)\\ &+ \sigma^3 \sin V \cos^2 V\left(\frac{1}{3} + \tang^2\lambda\right)\\ &- \sigma^3 \sin^3 V\left(\frac{1}{3} \tang^2\lambda\right);\end{aligned}$$

enfin pour l'azimut V',

$$\begin{aligned}V' = V &- \sigma \sin V \tang\lambda\left(1 - \frac{1}{2}\,\varepsilon \sin^2\lambda + \frac{3}{8}\,\varepsilon^2 \sin^4\lambda\right)\\ &+ \sigma^2 \sin V \cos V\left(\frac{1}{2} + \tang^2\lambda - \varepsilon \tang^2\lambda\right)\\ &+ \sigma^3 \sin^3 V \tang\lambda\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \tang^2\lambda\right)\\ &- \sigma^3 \sin V \cos^2 V \tang\lambda\left(\frac{5}{6} + \tang^2\lambda\right).\end{aligned}$$

Tous les termes indépendans de ε se rapportant à la sphère du rayon b, il est évident qu'on les obtiendra au moyen de la série de *Taylor* (n° 5). Ces formules sont analogues à celles que j'ai désignées par (B) dans ce numéro. L'on trouvera dans le second volume du grand ouvrage sur la Méridienne de France, que M. *Delambre* vient de publier, d'autres formules géodésiques relatives au sphéroïde de révolution, et démontrées d'une manière très-élémentaire.

FIN.

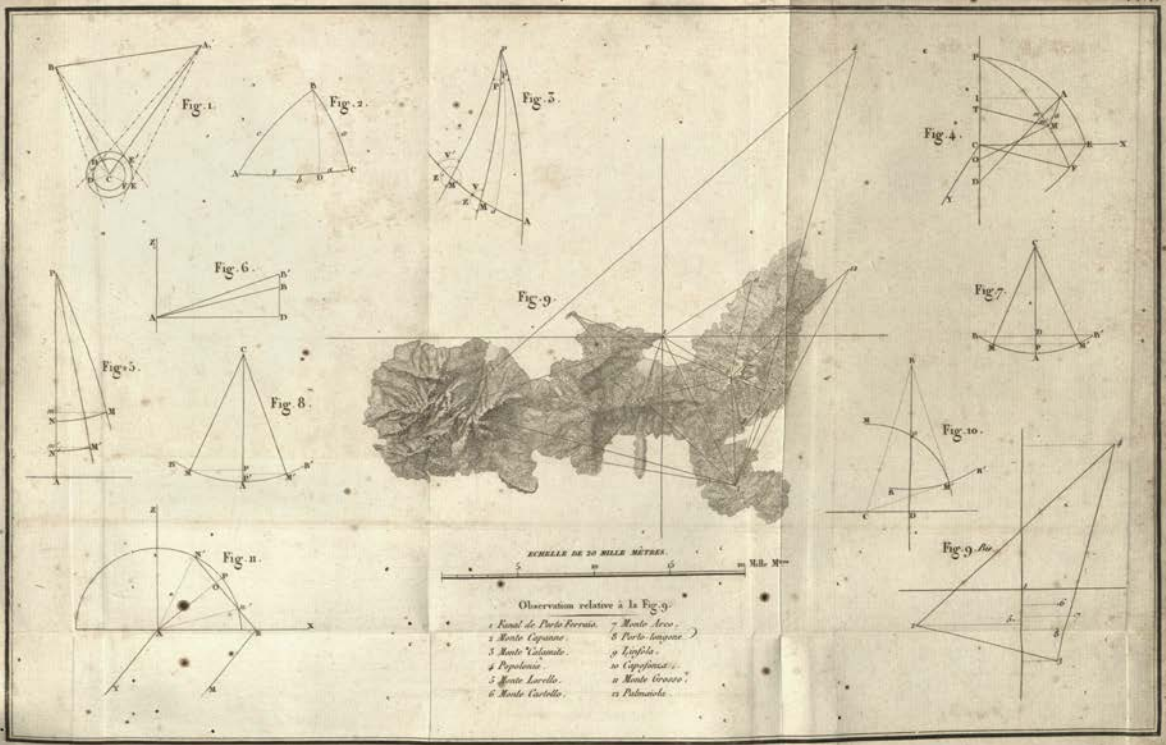


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 9 bis.
ECHELLE DE 20 MILLE MÈTRES.
5
10
15
20 Mille Mètres
Observation relative à la Fig. 9.
1 Fanal de Porto Ferraio.
2 Monte Capanne.
3 Monte Calamite.
4 Popolonia.
5 Monte Lorello.
6 Monte Castello.
7 Monte Arco.
8 Porto-longone.
9 Linfola.
10 Capofonte.
11 Monte Grosso.
12 Palmaiola.

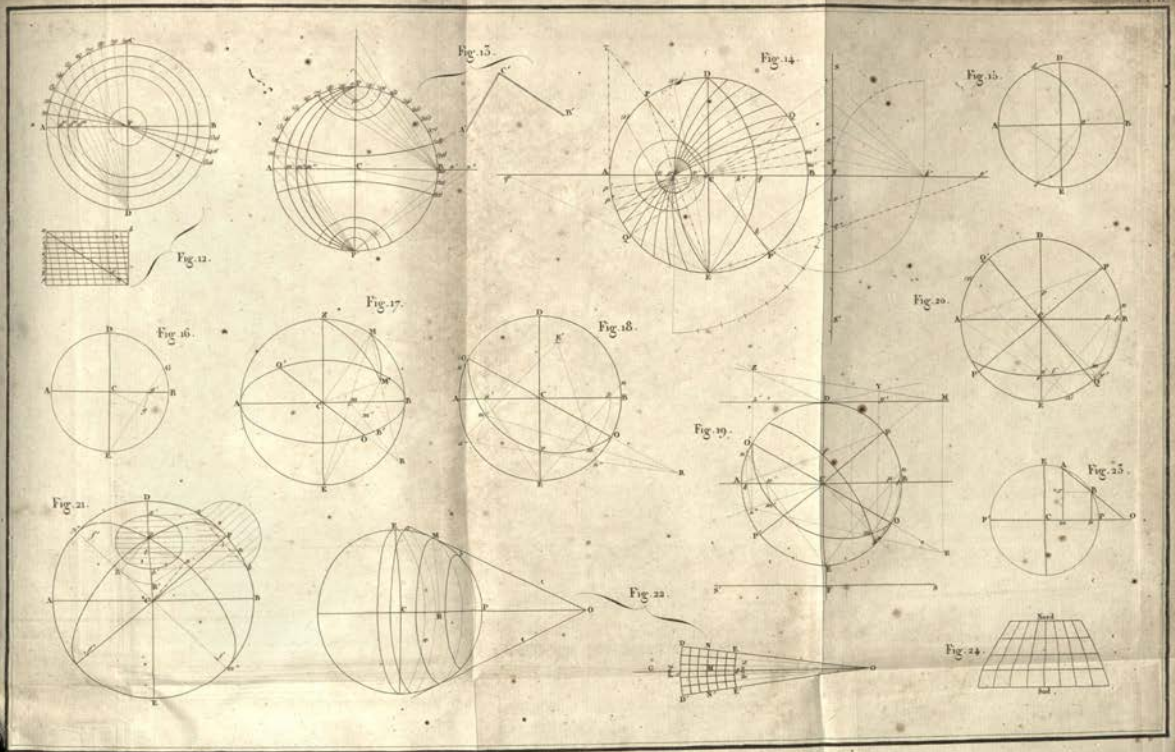


Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Nord
Sud

Fig. 28.

Fig. 29.

Fig. 30.

Fig. 27.

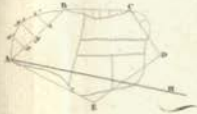
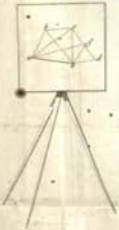


Fig. 31.



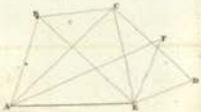
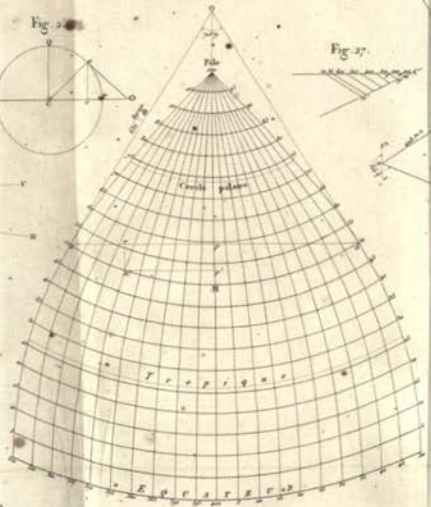
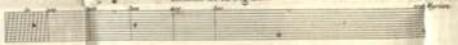


Fig. 32.

Fig. 26



Echelle de la Fig. 26.



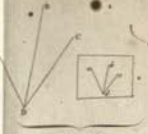


Fig. 33.

Fig. 35.

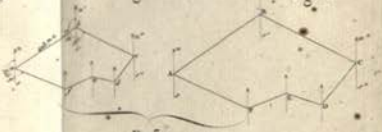


Fig. 34.

Fig. 36.

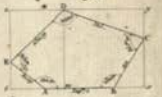


Fig. 39.

Fig. 38.

Fig. 39.

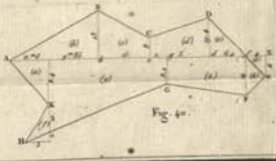


Fig. 40.

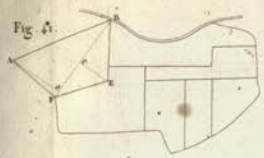


Fig. 41.

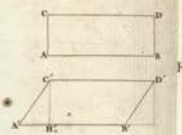


Fig. 42.

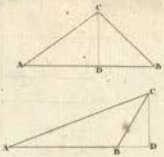


Fig. 43.

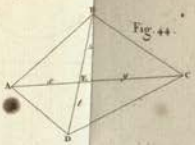


Fig. 44.

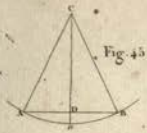


Fig. 45.

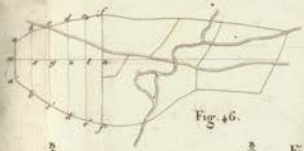


Fig. 46.

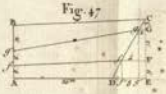


Fig. 47.

Fig. 48.

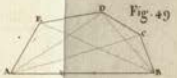


Fig. 49.

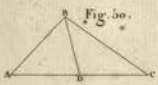


Fig. 50.

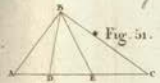


Fig. 51.

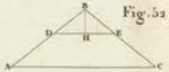


Fig. 52.

Fig. 53.

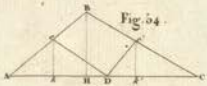


Fig. 54.

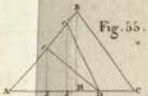


Fig. 55.

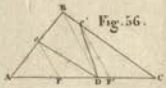


Fig. 56.

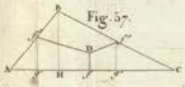


Fig. 57.

Fig. 58.

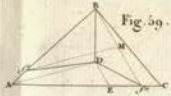


Fig. 59.

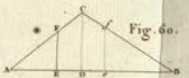


Fig. 60.

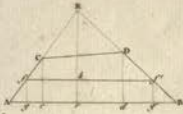


Fig. 61.

Fig. 62.

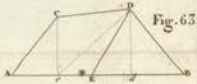


Fig. 63.

Fig. 64.

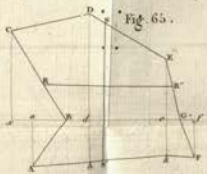


Fig. 65.

Fig. 66.

Fig. 67.

Fig. 68.

Fig. 73. A.

Fig. 73.

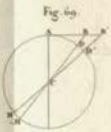


Fig. 69.

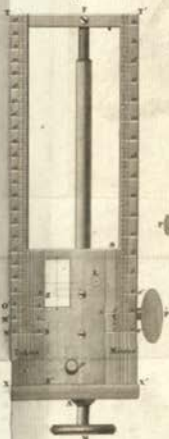


Fig. 76.

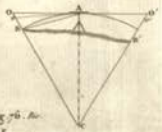


Fig. 74.

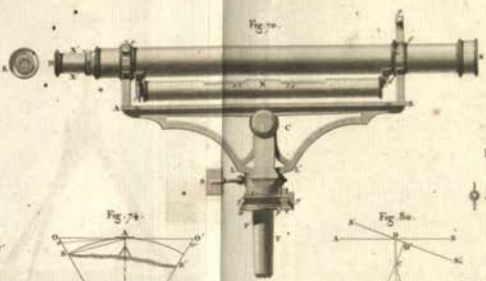


Fig. 70.

Fig. 72.

Fig. 80.

Fig. 71.

Fig. 76. A.

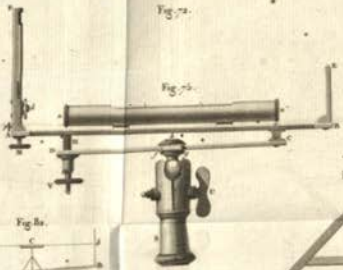


Fig. 75.

Fig. 78.

Fig. 79.

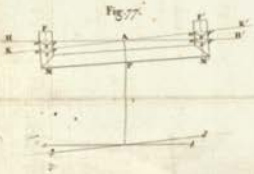


Fig. 77.

Fig. 81.

Fig. 82.

Fig. 83.

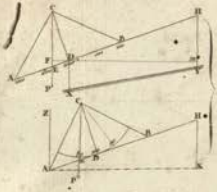


Fig. 84.

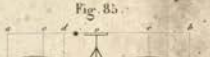


Fig. 85.

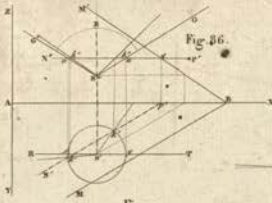


Fig. 86.

Fig. 87.

Fig. 90.

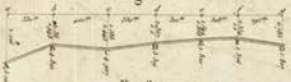


Fig. 88.

Fig. 91.

Fig. 92.

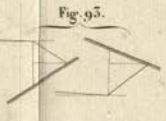


Fig. 93.

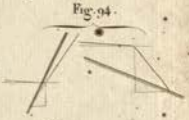


Fig. 94.

Fig. 89.

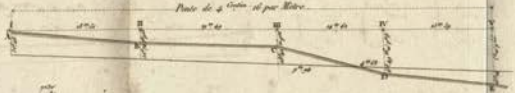


Fig. 99.

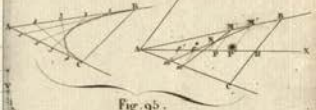


Fig. 95.

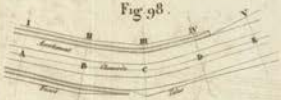


Fig. 98.

4e Profil de la Route.

Fig. 101.

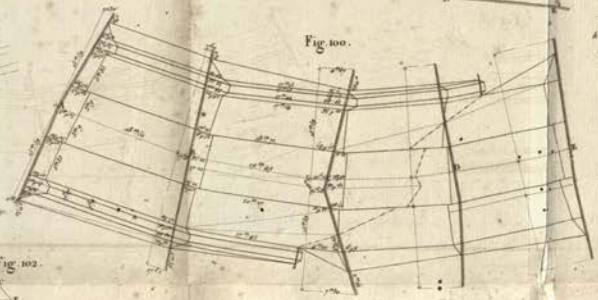


Fig. 100.

Fig. 96.

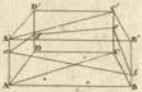
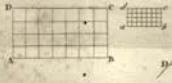


Fig. 97.



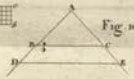


Fig. 102.

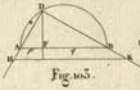


Fig. 103.

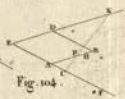


Fig. 104.

Fig. 105.

00053043

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 28 September, 2015